



Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad de Los Andes

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Marcos Lizana

Mérida – Venezuela
Junio de 2000

Contenido

1	Preliminares	7
§ 1.1	Espacio de las Funciones Continuas y Teoremas de Punto Fijo	7
§ 1.2	Condición de Lipschitz	8
§ 1.3	Desigualdades Integrales	10
§ 1.4	Comentarios y Sugerencias	12
§ 1.5	Ejercicios y Problemas	13
2	Teoría General	15
§ 2.1	Existencia y Unicidad	15
§ 2.2	Prolongación de Soluciones	19
§ 2.3	Continuidad de las Soluciones Respecto a los Datos Iniciales.	24
§ 2.4	Dependencia Continua de las Soluciones Respecto a Parámetros	27
§ 2.5	Derivabilidad de las Soluciones Respecto a los Datos Iniciales y a Parámetros	30
§ 2.6	E.D.O. con Parte Derecha Discontinua	33
§ 2.7	Ejercicios y Problemas	36
3	Sistemas Lineales	39
§ 3.1	Sistemas Lineales Homogéneos	39
§ 3.2	Sistemas Lineales No-Homogéneos	42
§ 3.3	Sistemas Lineal Conjugado	43
§ 3.4	Sistemas Reducibles	44
§ 3.5	Sistemas Lineales Homogéneos a Coeficientes Periódicos	45
§ 3.6	Sistemas Lineales ω -Periódicos No Homogéneos	48
§ 3.7	Comentarios y Sugerencias	53
§ 3.8	Ejercicios y Problemas	54
4	Teoría de la Estabilidad	57
§ 4.1	Definiciones de Estabilidad	57
§ 4.2	Estabilidad para Sistemas Lineales	59
§ 4.3	Sistemas Lineales a Coeficientes Constantes	61

§ 4.4	Criterio de Estabilidad de Routh-Hurwitz	63
§ 4.5	Sistemas Lineales Semi-Autónomos	68
§ 4.6	Sistemas no Lineales	69
§ 4.7	Comentarios y Sugerencias	72
§ 4.8	Ejercicios y Problemas	73
5	Segundo Método de Liapunov	75
§ 5.1	Preliminares	75
§ 5.2	Teoremas sobre Estabilidad	79
§ 5.3	Funciones de Liapunov para Sistemas Lineales	85
§ 5.4	Inestabilidad de Sistemas Semi-lineales	90
§ 5.5	Comentarios y Sugerencias	95
§ 5.6	Ejercicios y Problemas	96
6	Introducción a Sistemas Dinámicos	99
§ 6.1	Clasificación de Orbitas y Teorema de Poincaré-Bendixson	99
§ 6.2	Clasificación de los Puntos Críticos de Sistemas Bidimensionales	108
§ 6.3	Comentarios y Sugerencias	113
§ 6.4	Ejercicios y Problemas	114

Introducción

Es bien reconocido en el quehacer científico, bien sea en Física, Biología, Química, Ingeniería, etc., la utilidad de las ecuaciones diferenciales. También es conocido que mientras mas fiable sea el modelo, mas compleja es su formulación matemática. Lo cual requiere de un análisis cualitativo ya que un análisis cuantitativo prácticamente es imposible por la complejidad de las ecuaciones diferenciales involucradas en el modelo estudiado. Así, a partir del estudio de tales ecuaciones es posible predecir y/o tener información acerca del fenómeno en cuestión.

El estudio de las ecuaciones diferenciales ha influenciado el desarrollo de otras áreas de la matemática, por ejemplo topología, análisis, etc. . En el prefacio del libro de Daleckii y Krein [7] se explica como problemas de estabilidad para ecuaciones diferenciales condujeron al desarrollo de la teoría espectral de operadores. Jean Dieudonné en [8] refiriéndose a la historia del análisis funcional dedica seis de los nueve párrafos a la evolución de las ecuaciones diferenciales. No pretendemos decir que los únicos problemas importantes de las matemáticas son los provistos por ecuaciones diferenciales, sólo queremos ayudar a terminar con aquella idea, que los problemas de ecuaciones diferenciales se reducen a un largo y tedioso ejercicio de integración.

El objetivo de estas guías teórico-prácticas es reunir en un curso de un semestre los fundamentos básicos de la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales, de modo que el estudiante al final del curso esté en condiciones de abordar el estudio de la dinámica local y/o global de modelos concretos. Se procura que estas guías sean autocontenidas a fin de evitar la dispersión, ya que la bibliografía existente en ecuaciones diferenciales es extensa. Cada Capítulo está acompañado de una sección de ejercicios y problemas seleccionados cuidadosamente para que su grado de complejidad no exceda los objetivos de estas guías y de una sección de comentarios y sugerencias que sirva de guía al estudiante para estudios posteriores mas avanzados sobre ecuaciones diferenciales.

Capítulo 1

Preliminares

La intención de este capítulo es la de presentar algunos hechos básicos que utilizaremos en el desarrollo de estas notas, procurando así que éstas se acerquen lo más posible a ser auto contenidas.

§ 1.1 Espacio de las Funciones Continuas y Teoremas de Punto Fijo

Consideremos A y B dos espacios topológicos y denotemos por $C[A, B]$ al conjunto de todas las funciones continuas de A en B . En particular, el conjunto $C[[a, b], \mathbb{R}^n]$ con las operaciones usuales de suma de funciones y producto por un escalar, es un espacio vectorial. Además, con la norma $\|\varphi\| = \max\{|\varphi(t)| : t \in [a, b]\}$ es un Espacio de Banach separable, donde $|\cdot|$ es cualquier norma en \mathbb{R}^n .

En Análisis es bastante común procurar caracterizar los conjunto compactos en un espacio de funciones dado. En el caso concreto del espacio de las funciones continuas, esta caracterización viene dada por el teorema de Arzela-Ascoli, el cual enunciaremos para mayor completitud.

Definición 1.1 Sea A un subconjunto de $C[[a, b], \mathbb{R}^n]$. Se dice que A es un conjunto uniformemente acotado, si existe una constante $K > 0$; tal que $\|\varphi\| \leq K$, para toda $\varphi \in A$. Si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta \equiv \delta(\varepsilon) > 0$, tal que $|t - s| < \delta$ implica que $|\varphi(t) - \varphi(s)| < \varepsilon$, para cualquier $\varphi \in A$, entonces se dice que A es un conjunto equicontinuo.

Lema 1.1 (Arzela-Ascoli,[11]) *Un conjunto $A \subset C[[a, b], \mathbb{R}^n]$ es relativamente compacto si y sólo si es uniformemente acotado y equicontinuo.*

En particular, del lema de Arzela-Ascoli, se sigue que toda sucesión $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ de un conjunto A equicontinuo y uniformemente acotado de $C[[a, b], \mathbb{R}^n]$, posee una subsucesión uniformemente convergente sobre $[a, b]$, puede ser que el límite de la subsucesión no pertenezca a A .

Veamos en lo que sigue algunos teoremas de punto fijo. Para ello, consideremos un espacio métrico completo E y una transformación $T : E \rightarrow E$.

Definición 1.2 Se dice que $x \in E$ es un punto fijo de la transformación T , si $Tx = x$. Diremos que la aplicación $T : E \rightarrow E$ es una contracción, si existe una constante $L \in (0, 1)$, tal que $d(Tx, Ty) \leq Ld(x, y)$, para todo x, y en E .

Teorema 1.2 (Banach 1922,[11]) *Si $T : E \rightarrow E$ es una contracción, entonces T posee un único punto fijo en E .*

Supongamos ahora que G es un espacio topológico y consideremos una familia de operadores T_y de E en si mismo, con $y \in G$. Diremos que $T_y : E \rightarrow E$ es una contracción uniforme, si existe una constante $L \in (0, 1)$, tal que $d(T_y x_1, T_y x_2) \leq L d(x_1, x_2)$ para todo $x_1, x_2 \in E$ e $y \in G$.

Teorema 1.3 *Si $T_y : E \rightarrow E$ es una contracción uniforme y para cada x en E , $T_y x$ es continuo en y , entonces el único punto fijo de T_y , al cual denotaremos por $g(y)$, es continuo en y . Además, si interior $G = \overset{\circ}{G} \neq \emptyset$ y $T_y x$ es continuamente diferenciable en x e y , entonces $g \in C^1[\overset{\circ}{G}, E]$.*

Observemos que no siempre es posible garantizar la contractilidad de una transformación dada, por lo que se hace necesario recurrir a teoremas de punto fijo más generales que los anteriores. Así, tenemos por ejemplo el siguiente:

Teorema 1.4 (Brouwer 1910,[11]) *Sea E un espacio vectorial normado, finito dimensional y $B := \{x \in E : |x| \leq 1\}$. Consideremos un espacio métrico U homeomorfo a B . Entonces toda transformación continua $T : U \rightarrow U$ posee al menos un punto fijo en U . En particular, U puede ser un subconjunto convexo y compacto de E .*

A pesar de la sencillez del enunciado del teorema de Brouwer, su demostración dista mucho de ser elemental, al final de este capítulo se dan mas detalles sobre este teorema. Su generalización a espacios normados infinito dimensionales se debe a Schauder .

Teorema 1.5 (Schauder 1930,[11]) *Consideremos E espacio normado y sea U un subconjunto convexo y compacto de E . Si $T : U \rightarrow U$ es una transformación continua, entonces T posee al menos un punto fijo en U .*

Un resultado muy útil en las aplicaciones, el cual es consecuencia del teorema de Schauder, es el siguiente:

Corolario 1.6 *Supongamos que U es un subconjunto cerrado, convexo y acotado de un espacio normado E y sea $T : U \rightarrow U$ un operador completamente continuo, es decir, un operador compacto y continuo. Entonces T posee al menos un punto fijo en U .*

§ 1.2 Condición de Lipschitz

Definición 1.3 Sea J un intervalo y D un subconjunto de \mathbb{R}^n . La función $f : J \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ se dice que es globalmente Lipschitz, respecto a $x \in D$, uniformemente en $t \in J$, sobre $J \times D$, si existe una constante $K > 0$, tal que

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq K |x_1 - x_2| \quad , \quad \forall (t, x_i) \in J \times D \quad , \quad i = 1, 2.$$

Definición 1.4 Diremos que f es una función localmente Lipschitz sobre $J \times D$, si para todo punto $p \in J \times D$, existe un entorno V_p del punto p , tal que la restricción de f a V_p es globalmente Lipschitz.

Los dos conceptos anteriores están relacionados como se ve en el siguiente :

Lema 1.7 Si A es un subconjunto compacto de $J \times D$ y $f \in C[J \times D, \mathbb{R}^n]$ es una función localmente Lipschitz, entonces su restricción al conjunto A es globalmente Lipschitz.

Demostración 1. Sea A un subconjunto compacto de $J \times D$. Como f es localmente Lipschitz, entonces para cada $p \in J \times D$, existe un entorno V_p tal que $f|_{V_p}$ es globalmente Lipschitz. Claramente, $\{V_p\}_{p \in A}$ es un cubrimiento abierto de A . Como A es un conjunto compacto, existe un $\varepsilon > 0$, tal que para cada $p \in A$, existe un V_p con la propiedad que $\mathbb{B}_{2\varepsilon}(p) \subset V_p$. Es obvio que $\mathbb{B}_\varepsilon(p)$ también es un cubrimiento abierto de A . Luego por la compacidad de A , existen puntos $p_1, \dots, p_m \in A$ tales que $A \subset \bigcup_{i=1}^m \mathbb{B}_\varepsilon(p_i)$.

Sean $(t, x_1), (t, x_2)$ dos puntos arbitrarios en A . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $(t, x_1) \in \mathbb{B}_\varepsilon(p_i)$ para algún $i \in \{1, \dots, m\}$. Se presentan dos casos

1. El punto $(t, x_2) \in \mathbb{B}_{2\varepsilon}(p_i)$. Luego existe una constante $K_i > 0$ tal que $|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq K_i |x_1 - x_2|$.
2. El punto $(t, x_2) \notin \mathbb{B}_{2\varepsilon}(p_i)$. En este caso se verifica que $|x_1 - x_2| \geq \varepsilon$. Pongamos $M = \max\{|f(t, x)|, (t, x) \in A\}$. Así se tiene que $|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq 2M \leq 2M|x_1 - x_2|/\varepsilon$.

Eligiendo $K = \max\{K_1, \dots, K_m, 2M/\varepsilon\}$ concluimos la prueba del Lema. ■

Demostración 2. Por reducción al absurdo. Supongamos que para todo $K > 0$, existen (t, x_1) y (t, x_2) en A , tales que

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| > K |x_1 - x_2|.$$

En particular, para cada $k \in \mathbb{N}$, existen puntos $(t_k, x_i^k) \in A, i = 1, 2$, tales que

$$|f(t_k, x_1^k) - f(t_k, x_2^k)| > k |x_1^k - x_2^k|. \quad (1.1)$$

Como A es compacto, también lo es $A \times A$. Por tanto, la sucesión $(z_k)_{k \geq 1}$, donde $z_k := ((t_k, x_1^k), (t_k, x_2^k))$ posee una subsucesión convergente en $A \times A$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que z_k es convergente. Llamemos $z^* := ((t^*, x_1^*), (t^*, x_2^*)) \in A$ al límite de z_k .

Sea $M = \max\{|f(t, x)| : (t, x) \in A\}$. Entonces por (1.1) obtenemos que

$$|x_1^k - x_2^k| \leq \frac{2M}{k};$$

y de allí que $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_1^k - x_2^k| = 0$.

Por otra parte, a partir de

$$| |x_1^* - x_2^*| - |x_1^k - x_2^k| | \leq | (x_1^* - x_1^k) - (x_2^* - x_2^k) |,$$

se obtiene que

$$|x_1^* - x_2^*| = \lim_{k \rightarrow \infty} |x_1^k - x_2^k| = 0.$$

Luego, $x_1^* = x_2^*$. Ahora, al ser f localmente Lipschitz, existe un entorno V^* del punto $(t^*, x_1^*) \in A$ y una constante $K^* \equiv K(V^*) > 0$, tal que

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq K^* |x_1 - x_2|, \quad \forall (t, x_i) \in V^*, \quad i = 1, 2.$$

Por lo tanto, debido a que $(t_k, x_i^k) \rightarrow (t^*, x_i^*)$, existe $N > 0$, tal que $(t_k, x_i^k) \in V^*$ para $k \geq N, i = 1, 2$ y además

$$|f(t_k, x_1^k) - f(t_k, x_2^k)| \leq K^* |x_1^k - x_2^k|,$$

lo que contradice la desigualdad (1.1). ■

§ 1.3 Desigualdades Integrales

En esta sección daremos algunos resultados sobre desigualdades integrales, los cuales utilizaremos para estimar el crecimiento de las soluciones de ecuaciones diferenciales. Primero demostraremos una desigualdad integral bastante general y a partir de ella obtendremos la desigualdad de Gronwall.

Lema 1.8 Consideremos $u, \alpha \in C[\mathbb{R}, \mathbb{R}]$ y $\beta \in L_{loc}^1[\mathbb{R}, \mathbb{R}^+]$. Si α es además una función creciente y

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_{t_0}^t \beta(s)u(s)ds, \quad \forall t \geq t_0, \quad (1.2)$$

entonces

$$u(t) \leq \alpha(t) \exp\left(\int_{t_0}^t \beta(s)ds\right), \quad \forall t \geq t_0. \quad (1.3)$$

Demostración. Sea $\tau \in [t_0, t]$. Por ser $\alpha(t)$ creciente, se tiene que

$$u(\tau) \leq \alpha(t) + \int_{t_0}^{\tau} \beta(s)u(s)ds. \quad (1.4)$$

Definamos $R(\tau) := \alpha(t) + \int_{t_0}^{\tau} \beta(s)u(s)ds$ y observemos que $\beta u \in L^1[t_0, t]$.

Entonces $R'(\tau) = \beta(\tau)u(\tau)$, casi siempre sobre $[t_0, t]$. Multiplicando en(1.4) por $\beta(\tau)$, obtenemos que $R'(\tau) \leq \beta(\tau)R(\tau)$, casi siempre sobre $[t_0, t]$.

Reescribiendo la desigualdad anterior e integrando entre t_0 y t obtenemos que

$$R(t) \leq R(t_0) \exp \left\{ \int_{t_0}^t \beta(s) ds \right\}. \quad (1.5)$$

Luego, por la definición de $R(t)$ y por (1.4) obtenemos (1.3). ■

Lema 1.9 (Desigualdad de Gronwall) *Supongamos que $u, \beta \in C[\mathbb{R}, \mathbb{R}^+]$ y sea c una constante no negativa. La desigualdad*

$$u(t) \leq c + \int_{t_0}^t \beta(s)u(s)ds, \quad t \geq t_0,$$

implica que

$$u(t) \leq c \exp \left\{ \int_{t_0}^t \beta(s)ds \right\} \quad t \geq t_0.$$

Obsérvese que el lema de Gronwall es una consecuencia inmediata del lema 1.8, eligiendo $\alpha(t) = c, \forall t \in \mathbb{R}$.

§ 1.4 Comentarios y Sugerencias

Hemos mencionado que, a pesar de lo sencillo del enunciado del teorema de Brouwer, su demostración está lejos de ser elemental. Invitamos al lector a que demuestre el teorema de Brouwer en el caso que $U = [a, b] \subset \mathbb{R}$.

En el libro de Courant-Robbins [2] se puede consultar una prueba en el caso bidimensional, la cual no se generaliza a dimensiones mayores a 2. Una demostración en el caso general $U \subset \mathbb{R}^n$, con $n > 2$, puede consultarse por ejemplo en Ch.S. Höning [10], D.R. Smart [22]. Sin embargo, recientemente J. Milnor [15] dió una prueba más sencilla, la que a su vez fue simplificada por C. Rogers [21].

Para resultados más refinados que el teorema de Brouwer, recomendamos consultar el libro de D. R. Smart [22].

En este capítulo hemos mencionado sólo las desigualdades integrales mas usadas a lo largo de esta exposición. Sin embargo esta es una técnica muy importante. Un lugar adecuado para consultar mas detalle acerca de este tema es el libro de V. Lakshmikantham y S. Leela [14].

§ 1.5 Ejercicios y Problemas

1. Sea E un espacio métrico completo y $T : E \rightarrow E$ un operador. Si existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que T^n es una contracción, entonces T posee un único punto fijo en E .
2. Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto. Denotemos por S al conjunto de todas las funciones $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ globalmente Lipschitz con una misma constante $K > 0$. Pruebe que si S es un conjunto acotado, entonces S es un conjunto compacto de $C[D, \mathbb{R}^n]$.
3. Sea $f : J \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua. Donde $J = (a, b)$ y D es un subconjunto abierto \mathbb{R}^n . Denotemos por

$$\partial f / \partial x(t, x) := \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, x) \right) \quad i, j = \overline{1, n}$$

Demuestre las siguientes afirmaciones :

- (a) Sea D un conjunto convexo. Si $\partial f / \partial x$ existe, es continua y está acotada sobre $J \times D$, entonces f es globalmente Lipschitz sobre $J \times D$.
 - (b) Supongamos que $\partial f / \partial x$ existe y es uniformemente continua sobre $J \times D$, con D conjunto convexo. Si $J \times D$ es un subconjunto acotado de \mathbb{R}^{n+1} , entonces f es globalmente Lipschitz sobre $J \times D$. ¿ Es esencial la acotación de $J \times D$?.
 - (c) Si $\partial f / \partial x$ es continua sobre $J \times D$, entonces f es localmente Lipschitz sobre $J \times D$.
 - (d) Si $f : J \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ es localmente Lipschitz en x , uniformemente en t , entonces $\partial f / \partial x$ existe, excepto en un conjunto de medida nula.
 - (e) Si $\partial f / \partial x$ existe y no es acotada sobre $J \times D$, entonces f no puede ser globalmente Lipschitz sobre $J \times D$.
4. Muestre que el conjunto de las funciones globalmente Lipschitz son un subconjunto propio del conjunto de las funciones localmente Lipschitz.
 5. Si f es una función continua en t y localmente Lipschitz en x sobre $J \times D$, entonces $f \in C[J \times D, \mathbb{R}^n]$.
 6. Supongamos que u y $\beta \in C[\mathbb{R}, \mathbb{R}^+]$. Pruebe que si

$$u(t) \leq c + \left| \int_{t_0}^t \beta(s)u(s)ds \right|, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

entonces

$$u(t) \leq c \exp \left(\left| \int_{t_0}^t \beta(s)ds \right| \right), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

donde $c \geq 0$.

7. Supongamos que $u, \beta \in C[\mathbb{R}, \mathbb{R}^+]$. Demuestre que si se satisface la desigualdad

$$u(t) \leq u(\tau) + \left| \int_{\tau}^t \beta(s)u(s)ds \right|, \quad \forall t, \tau \in \mathbb{R},$$

entonces tiene lugar

$$u(t_0) \exp\left(-\int_{t_0}^t \beta(s)ds\right) \leq u(t) \leq u(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^t \beta(s)ds\right), \quad \forall t \geq t_0.$$

8. Sean $u, \alpha \in C[\mathbb{R}, \mathbb{R}]$ y $\beta \in C[\mathbb{R}, \mathbb{R}^+]$. Si

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_{t_0}^t \beta(s)u(s)ds, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

entonces

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_{t_0}^t \left[\alpha(s)\beta(s) \exp\left(\int_s^t \beta(\tau)d\tau\right) ds \right], \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Capítulo 2

Teoría General

En este capítulo, estudiaremos propiedades generales de las ecuaciones diferenciales ordinarias: existencia, unicidad, continuidad y derivabilidad de las soluciones, respecto a los datos iniciales y parámetros.

§ 2.1 Existencia y Unicidad

Consideremos la E.D.O.

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad (2.1)$$

con

$$x(t_0) = x_0 ; \quad (2.2)$$

donde $f \in C[J \times D, \mathbb{R}^n]$, $J = (a, b)$ con $-\infty \leq a < b \leq +\infty$; D es un subconjunto abierto y conexo de \mathbb{R}^n y $(t_0, x_0) \in J \times D$.

Entenderemos por solución del problema de valor inicial (P.V.I.) (2.1)-(2.2), a una función $\varphi \in C^1(J_1, D)$ tal que φ satisface la ecuación (2.1) para todo $t \in J_1$ y la condición (2.2), donde $J_1 \subset J$. En el caso que $J_1 = J$, diremos que φ es una solución global del P.V.I. (2.1)-(2.2).

Por comodidad en la notación de aquí en adelante cuando no se preste a confusión omitiremos los argumentos de la función $x(t)$ y simplemente escribiremos $x' = f(t, x)$; y a f lo llamaremos campo vectorial.

Antes de enunciar un teorema de existencia y unicidad, discutiremos unos ejemplos a fin de visualizar mejor el problema que estamos tratando.

Ejemplo 2.1 Sea $J \times D = \mathbb{R}^2$, $f(t, x) = x^2$. Es fácil mostrar que cualquier solución no nula de la ecuación diferencial $x' = x^2$ es de la forma $\varphi(t) = -[t + c]^{-1}$ con $c \in \mathbb{R}$. Además, $\varphi(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, también es solución.

Esto nos permite concluir que a pesar de ser $f(t, x) = x^2$ una función suave, no existen soluciones globales no nulas (ver fig. § 2.1). Además, por cada punto $(0, x_0)$ pasa una única solución de $x' = x^2$. Observemos finalmente que $f(t, x) = x^2$ es localmente Lipschitz sobre \mathbb{R}^2 .

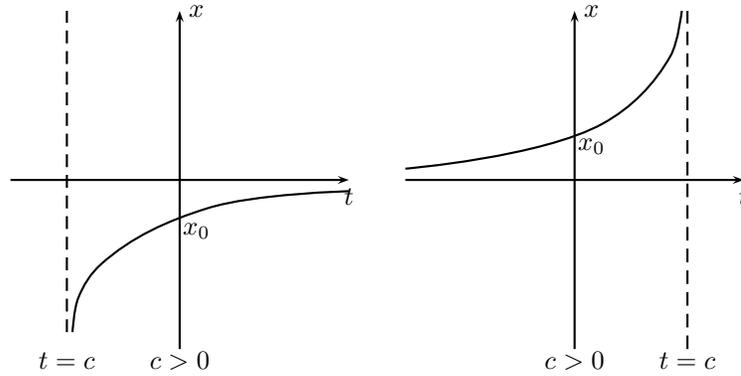


Figura 2.1

Ejemplo 2.2 Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(t, x) = 3x^{2/3}$. Consideremos el siguiente P.V.I. $x' = f(t, x)$, $x(0) = x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Integrando la ecuación diferencial obtenemos que su solución general viene dada por $x(t) = (t + c)^3$, donde c es una constante. De donde se sigue que por cada punto $(0, x_0)$ pasan infinitas soluciones. Por ejemplo, la función $\varphi(\cdot, a, b) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$\varphi(t, a, b) = \begin{cases} (t - b)^3 & , \text{ si } t > b \\ 0 & , \text{ si } a \leq t \leq b \\ (t - a)^3 & , \text{ si } t < a \end{cases}$$

es solución de $x' = 3x^{2/3}$ con $x(0) = 0$, para todo $a \leq 0 \leq b$, como se ve en la figura 2.2

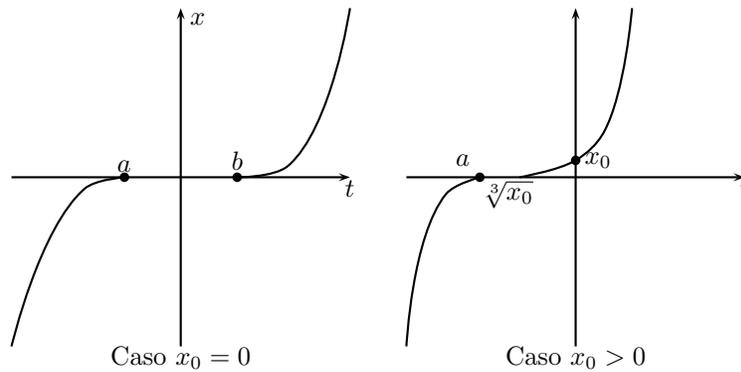


Figura 2.2

Cuando $x_0 > 0$, la función $\psi(\cdot, a) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$\psi(t, a) = \begin{cases} (t + \sqrt[3]{x_0})^3 & , \text{ si } t \geq -\sqrt[3]{x_0} \\ 0 & , \text{ si } a \leq t < -\sqrt[3]{x_0} \\ (t - a)^3 & , \text{ si } t < a \end{cases} .$$

es solución de $x' = 3x^{2/3}$ con $x(0) = x_0 > 0$, para todo $a \leq -\sqrt[3]{x_0}$. Análogamente se trata el caso $x_0 < 0$.

Vemos que en este caso, sí existen soluciones globales pero no hay unicidad global. Sin embargo, dependiendo de la posición de x_0 , puede haber unicidad local. En efecto, si $x_0 \neq 0$, entonces existe un entorno de $t_0 = 0$, tal que por el punto $(0, x_0)$ pasa una única solución de $x' = 3x^{2/3}$. En cambio, si $x_0 = 0$, entonces por más pequeño que sea el entorno de $t_0 = 0$ que se considere, por el punto $(0, 0)$ pasan infinitas soluciones de $x' = 3x^{2/3}$, (ver fig. 2.2).

Un cálculo directo muestra que $f(t, x) = 3x^{2/3}$ es localmente Lipschitz solo sobre intervalos que no contengan a cero.

De los ejemplos 2.1 y 2.2 vemos que para E.D.O. de la forma (2.1), la sola continuidad del campo vectorial f no garantiza en general, ni la existencia de soluciones globales ni la unicidad.

Tiene lugar el siguiente

Lema 2.1 *Supongamos que $f \in C[J \times D, \mathbb{R}^n]$. El P.V.I. (2.1)-(2.2) es equivalente a la resolución de la ecuación integral*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds. \quad (2.3)$$

El resultado que presentaremos a continuación nos da la existencia y unicidad de soluciones del P.V.I. (2.1)-(2.2) bajo condiciones bastante generales.

Teorema 2.2 *Si $f \in C[J \times D, \mathbb{R}^n]$ es localmente Lipschitz, entonces para cualquier punto $(t_0, x_0) \in J \times D$, existe $\delta > 0$ y una única solución de (2.1)-(2.2) definida en $J_1 = (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$.*

Demostración. Elijamos constantes $a > 0$ y $b > 0$ tales que el conjunto

$$D^* = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\},$$

esté contenido en $J \times D$. Llamemos $M = \max\{|f(t, x)| : (t, x) \in D^*\}$, y sea $K > 0$ la constante de Lipschitz de $f|_{D^*}$.

Tomemos ahora un número $\delta > 0$ tal que $0 < \delta < \min\{a, b/M, 1/K\}$, y sea $J_1 = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

Consideremos ahora el subconjunto C^* de $C[J_1, \mathbb{R}^n]$ formado por las funciones que satisfacen las condiciones siguientes :

- a) $\varphi(t_0) = x_0$,
- b) $|\varphi(t) - x_0| \leq b, t \in J_1$.

Teniendo en cuenta el Lema 2.1 definamos en C^* un operador T mediante la siguiente fórmula :

$$T\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds \quad , \quad t \in J_1. \quad (2.4)$$

Es claro que si T posee puntos fijos, éstos son soluciones del P.V.I. (2.1)-(2.2), por lo que probaremos que T es una contracción de C^* en si misma. Es fácil ver que si $\varphi \in C^*$, entonces $T\varphi \in C^*$. Además, C^* es un subconjunto cerrado de $C[J_1, \mathbb{R}^n]$, por lo que C^* es completo. Por otra parte, si $\varphi_1, \varphi_2 \in C^*$ y $t \in J_1$, entonces

$$\begin{aligned} |T\varphi_1(t) - T\varphi_2(t)| &\leq \left| \int_{t_0}^t |f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s))| ds \right| \\ &\leq K \left| \int_{t_0}^t |\varphi_1(s) - \varphi_2(s)| ds \right| \\ &\leq K |t - t_0| \|\varphi_1 - \varphi_2\| \leq K\delta \|\varphi_1 - \varphi_2\|, \forall t \in J_1. \end{aligned}$$

Así que

$$\|T\varphi_1 - T\varphi_2\| \leq K\delta \|\varphi_1 - \varphi_2\|.$$

Teniendo en cuenta la elección de δ , obtenemos que $T : C^* \rightarrow C^*$ es una contracción. Entonces, por el teorema de punto fijo de Banach existe un único punto fijo para T en C^* , el que a su vez es la única solución del P.V.I. (2.1)-(2.2) definido en J_1 . ■

Observemos que la condición de Lipschitz es suficiente para obtener la unicidad de las soluciones de (2.1) pero no es necesaria. Para ello recomendamos al lector ver el ejercicio 2.7.2. Además, el teorema 2.2 es estrictamente local. En efecto, el P.V.I. $x' = \cos(t+x)$ con $x(0) = 0$, posee una única solución $x(t) = 2 \arctan(t) - t$, definida para todo t . Sin embargo, no es difícil ver que el número δ dado por el teorema 2.2 es menor o igual a 1.

Cabe preguntarse: No siendo f localmente Lipschitz, ¿podría el P.V.I. (2.1)-(2.2) tener solución ?. La respuesta a esta pregunta la da el siguiente :

Teorema 2.3 (Peano) Si $f \in C[J \times D, \mathbb{R}^n]$, entonces el P.V.I. (2.1)-(2.2) posee al menos una solución.

Demostración. Sean $a > 0$, $b > 0$ y $M > 0$ las constantes que figuran en la demostración del teorema 2.2. Escojamos una constante δ^* de modo que $0 < \delta^* < \min\{a, b/M\}$, y sea $\tilde{J} = [t_0 - \delta^*, t_0 + \delta^*]$. Definamos el conjunto

$$\tilde{C} = \{\varphi \in C[\tilde{J}, \mathbb{R}^n] : \varphi(t_0) = x_0, |\varphi(t) - x_0| \leq b, t \in \tilde{J}\}.$$

Es inmediato que \tilde{C} es un conjunto convexo, cerrado y acotado.

Para cada $\varphi \in \tilde{C}$, definamos el operador T de la siguiente manera

$$T\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds, t \in \tilde{J}.$$

Mostremos que $T\tilde{C} \subset \tilde{C}$ y que es un operador completamente continuo. Es obvio que para todo $\varphi \in \tilde{C}$, $T\varphi(t_0) = x_0$. También,

$$|T\varphi(t) - x_0| \leq \left| \int_{t_0}^t |f(s, \varphi(s))| ds \right| \leq M |t - t_0| < M\delta^* \leq b, \forall t \in \tilde{J}.$$

Lo cual implica que $T\tilde{C} \subset \tilde{C}$.

Probemos ahora que $T\tilde{C}$ es un conjunto equicontinuo. Sean $\varphi \in \tilde{C}$, $t_1, t_2 \in \tilde{J}$. Entonces

$$|T\varphi(t_1) - T\varphi(t_2)| \leq \left| \int_{t_1}^{t_2} |f(s, \varphi(s))| ds \right| \leq M |t_1 - t_2|,$$

lo cual prueba la equicontinuidad de $T\tilde{C}$. Como $T\tilde{C}$ está uniformemente acotado, se sigue que la clausura de $T\tilde{C}$ es compacta.

Finalmente, mostremos que T es continuo. Como f es uniformemente continua sobre D , entonces para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que

$$|f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s))| < \varepsilon, \forall s \in \tilde{J}, \quad (2.5)$$

si $|\varphi_1(s) - \varphi_2(s)| < \delta$, $\forall s \in \tilde{J}$. Por otra parte, tenemos que

$$|T\varphi_1(t) - T\varphi_2(t)| \leq \left| \int_{t_0}^t |f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s))| ds \right|. \quad (2.6)$$

Así (2.5) y (2.6) prueban la continuidad de T .

Como todas las condiciones del corolario 1.6 del teorema de Schauder están satisfechas, se sigue que T posee al menos un punto fijo en C^* . Esto completa la demostración del teorema. ■

§ 2.2 Prolongación de Soluciones

Sean $\varphi_i : J_i \rightarrow D$, $i = 1, 2$, dos soluciones del P.V.I. (2.1)-(2.2), con $J_1 \subset J_2$. Diremos que φ_2 es una prolongación de φ_1 al intervalo J_2 , si $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$, $\forall t \in J_1$. Una solución del problema (2.1)-(2.2) se dice que es no prolongable, si ella no admite una prolongación; y en este caso, al intervalo J^* donde está definido φ , le llamaremos intervalo maximal de existencia de la solución φ .

Lema 2.4 Sea $J^* = (\alpha, \beta)$ y $\varphi \in C^1[J^*, \mathbb{R}^n]$. Si $|\varphi'(t)| \leq M$, $\forall t \in J^*$, entonces los límites $\lim_{t \rightarrow \alpha^+} \varphi(t)$ y $\lim_{t \rightarrow \beta^-} \varphi(t)$ existen.

Demostración. Demostraremos solamente la existencia de uno de los límites. La existencia del otro se prueba de manera completamente análoga.

Probemos que $\lim_{t \rightarrow \beta^-} \varphi(t)$ existe. Sea $(t_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de J^* , tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \beta$. Probaremos que la sucesión $(\varphi(t_n))_{n \geq 1}$ es convergente; para lo cual basta mostrar que es una sucesión de Cauchy.

Sea $\varepsilon > 0$, arbitrario. Como $\varphi \in C^1[\overline{J^*}, \mathbb{R}^n]$, tenemos que

$$|\varphi(t_n) - \varphi(t_m)| \leq \left| \int_{t_n}^{t_m} |\varphi'(t)| dt \right| \leq M |t_n - t_m|,$$

ya que $|\varphi'(t)| \leq M, \forall t \in J^*$.

Por otra parte, existe $N(\varepsilon) > 0$ tal que

$$|t_n - t_m| < \frac{\varepsilon}{M}, \quad \forall n, m \geq N.$$

Combinando las dos últimas desigualdades, se concluye la convergencia de la sucesión $(\varphi(t_n))_{n \geq 1}$. Pongamos $B = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n)$.

Probemos que $\lim_{t \rightarrow \beta^-} \varphi(t) = B$. Sea $t \in (\beta - \varepsilon/2M, \beta)$. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \beta$, existe un $t_k \in (\beta - \varepsilon/2M, \beta)$, tal que $|\varphi(t_k) - B| < \varepsilon/2$.

Así, para todo $t \in (\beta - \varepsilon/2M, \beta)$ se tiene que

$$|\varphi(t) - B| \leq |\varphi(t) - \varphi(t_k)| + |\varphi(t_k) - B| < M |t - t_k| + |\varphi(t_k) - B| < \varepsilon.$$

Lo que prueba que $\lim_{t \rightarrow \beta^-} \varphi(t) = B$. ■

Observemos que la afirmación del lema 2.4 es aún válida, si la función $\varphi : J^* \rightarrow \mathbb{R}^n$ es absolutamente continua y $\varphi' \in L^1[J^*, \mathbb{R}^n]$.

Lema 2.5 (Prolongación a un Intervalo Cerrado) Sea $\varphi : J^* \rightarrow D$ una solución del P.V.I. (2.1)-(2.2). Supongamos que se verifican las siguientes condiciones:

a) $\lim_{t \rightarrow \alpha^+} \varphi(t) = A$, $\lim_{t \rightarrow \beta^-} \varphi(t) = B$;

b) Los puntos $(\alpha, A), (\beta, B)$ pertenecen a $J \times D$. Entonces la función $\varphi_1 : [\alpha, \beta] \rightarrow D$ definida por

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} A & , \text{ si } t = \alpha \\ \varphi(t) & , \text{ si } t \in (\alpha, \beta) \\ B & , \text{ si } t = \beta \end{cases}$$

es solución del P.V.I.(2.1)-(2.2).

Demostración. Probemos que $\varphi'_1(\beta) = f(\beta, \varphi_1(\beta))$. Teniendo en cuenta la definición de $\varphi_1 = (\varphi_{11}, \varphi_{12}, \dots, \varphi_{1i}, \dots, \varphi_{1n})$ y las propiedades de φ , del teorema del valor medio se sigue que :

$$\frac{\varphi_{1i}(\beta) - \varphi_{1i}(\beta - h)}{h} = \varphi'_{1i}(\beta + h(\theta_i - 1)) = \varphi'_i(\beta + h(\theta_i - 1))$$

donde $h > 0$, $0 < \theta_i < 1$, $i = 1, \dots, n$ y φ_i es la i -ésima componente de φ . Por tanto,

$$\begin{aligned} \varphi'_{1i}(\beta) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\varphi_{1i}(\beta) - \varphi_{1i}(\beta - h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \varphi'_i(\beta + h(\theta_i - 1)) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} f_i(\beta + h(\theta_i - 1), \varphi(\beta + h(\theta_i - 1))) = f_i(\beta, B) = f_i(\beta, \varphi_1(\beta)), \end{aligned}$$

para cada $i = 1, \dots, n$.

Análogamente se prueba que $\varphi'_1(\alpha) = f(\alpha, \varphi_1(\alpha))$. ■

Observemos que bajo las hipótesis del lema 2.4 φ no solo admite una prolongación a un intervalo cerrado, sino que en realidad puede prolongarse a un intervalo abierto que contenga a $[\alpha, \beta]$. En efecto, denotemos con $\psi_2 : [\beta, \beta + \delta_2) \rightarrow D$, $\psi_1 : (\alpha - \delta_1, \alpha] \rightarrow D$ a las soluciones de los P.V.I.

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x) \\ x(\beta) = B \end{cases}, \quad \begin{cases} x'(t) = f(t, x) \\ x(\alpha) = A \end{cases}.$$

respectivamente; $\delta_i > 0$, $i = 1, 2$. La existencia y unicidad de ψ_1 y ψ_2 vienen garantizadas por el hecho de que (α, A) y $(\beta, B) \in J \times D$ y f verifica las hipótesis del teorema de existencia y unicidad.

Definamos $\varphi_2 : (\alpha - \delta_1, \beta + \delta_2) \rightarrow D$, como sigue :

$$\varphi_2(t) = \begin{cases} \psi_1(t) & \text{si } \alpha - \delta_1 < t \leq \alpha \\ \varphi(t) & \text{si } \alpha < t < \beta \\ \psi_2(t) & \text{si } \beta \leq t < \beta + \delta_2. \end{cases}$$

Para concluir que φ_2 es una prolongación de φ , es suficiente mostrar que la derivada lateral derecha (izquierda) de φ_2 (de φ_2) existe en $t = \alpha$ ($t = \beta$) y es igual a $f(\alpha, \varphi_2(\alpha))$ ($f(\beta, \varphi_2(\beta))$). Y esto se realiza de manera análoga a la prueba del lema 2.5.

Teorema 2.6 (Existencia y Unicidad de Soluciones no Prolongables)

Bajo las hipótesis del teorema de existencia y unicidad local, el P.V.I. (2.1)-(2.2) admite una única solución φ no prolongable, definida sobre el intervalo $J^* = (\alpha, \beta)$ con $\alpha \geq a$ y $\beta \leq b$.

Demostración. Sea $A = \{s \geq t_0 : \text{el P.V.I. (2.1)-(2.2) posee una única solución sobre } [t_0, s]\}$. Por el teorema 2.2, se tiene que $A \neq \emptyset$. Pongamos $\beta = \sup A$. Definamos ahora la función $\varphi : [t_0, \beta) \rightarrow D$ de la siguiente manera : Si $t \in [t_0, \beta)$, entonces existe $s^* \in A$, tal que $t < s^*$. Llamemos φ_{s^*} a la única solución de (2.1)-(2.2) definida sobre $[t_0, s^*)$ y pongamos $\varphi(t) := \varphi_{s^*}(t)$. Por la unicidad de φ_{s^*} , φ está bien definida. Además, por la construcción, φ es solución del P.V.I. (2.1)-(2.2) sobre $[t_0, \beta)$ y ella no puede ser prolongada más allá de β , ya que $\beta = \sup A$.

Análogamente se prueba, que existe una única solución de (2.1)-(2.2), definida sobre $(\alpha, t_0]$, no prolongable a la izquierda de α . ■

Un breve análisis del lema 2.5 y del teorema 2.6 nos conduce a enunciar el siguiente sencillo, pero importante resultado.

Corolario 2.7 *Si (α, β) es el intervalo maximal de existencia y unicidad de una solución φ de (2.1), entonces, $(t, \varphi(t))$ tiende a la frontera de $J \times D$, cuando $t \rightarrow \alpha^+$ y $t \rightarrow \beta^-$.*

Hasta el momento, toda la discusión sobre la prolongabilidad de las soluciones de (2.1) que hemos hecho, no nos permiten concluir nada acerca de la existencia de soluciones globales. Esto es razonable, ya que en el ejemplo 2.1 estudiamos una ecuación con parte derecha continua y localmente Lipschitz, que no tiene soluciones globales. A continuación probaremos un resultado bastante general, que garantiza precisamente la existencia de soluciones globales de (2.1).

Teorema 2.8 (Existencia y Unicidad Global)

Supongamos que $f \in C[J \times D, \mathbb{R}^n]$ es localmente Lipschitz. Sea $\varphi : (\alpha, \beta) \rightarrow D$ la única solución no prolongable del P.V.I. (2.1)-(2.2). Si existe un conjunto compacto $D^ \subset D$, tal que $\varphi(t) \in D^*$ para todo $t \in (\alpha, \beta)$, entonces φ es global; es decir, $\alpha = a$ y $\beta = b$.*

Demostración. La demostración la haremos por reducción al absurdo. Supongamos que $\varphi(t) \in D^*$ para todo $t \in (\alpha, \beta)$, pero $\alpha > a$ ó $\beta < b$. Concretamente supondremos que $\beta < b$.

Claramente $[t_0, \beta] \times D^* \subset J \times D$. Pongamos $M = \max\{|f(t, x)| : (t, x) \in [t_0, \beta] \times D^*\}$. Por lo tanto

$$|\varphi'(t)| = |f(t, \varphi(t))| \leq M, \quad t \in [t_0, \beta).$$

Así, por el lema 2.4, se tiene que $\lim_{t \rightarrow \beta^-} \varphi(t) = B$ y pertenece a D^* , ya que D^* es compacto. Esto muestra que $(\beta, B) \in J \times D$. Aplicando el lema 2.5, concluimos que φ se puede prolongar a un intervalo $[t_0, \beta + \delta)$, para algún $\delta > 0$. Contradicción. ■

Corolario 2.9 Si $\alpha > a$ ó $\beta < b$, entonces para todo conjunto compacto $D^* \subset D$, existe un $t \in (\alpha, t_0]$ ó $t \in [t_0, \beta)$ tal que $\varphi(t) \notin D^*$.

Un inconveniente que presenta el teorema de existencia global en las aplicaciones, tiene que ver con el conjunto compacto D^* ; ya que no se sabe en general como podemos construirlo. En lo que sigue daremos algunas condiciones suficientes para la existencia de soluciones globales.

Teorema 2.10 Supongamos que $f \in C[J \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n]$ es localmente Lipschitz y que existen funciones M y $N \in C[J, \mathbb{R}^+]$ tales que

$$|f(t, x)| \leq M(t) + N(t) |x|, \quad \forall (t, x) \in J \times \mathbb{R}^n.$$

Entonces todas las soluciones de (2.1) son globales.

Demostración. Por reducción al absurdo. Sea φ la única solución no prolongable del P.V.I. (2.1)-(2.2) definida sobre el intervalo (α, β) . Supongamos, por ejemplo, que $\beta < b$. Pongamos $M_1 = \max\{M(t) : t \in [t_0, \beta]\}$, $N_1 = \max\{N(t) : t \in [t_0, \beta]\}$. Como φ es solución de (2.1)-(2.2) y teniendo en cuenta las condiciones del teorema, se sigue que

$$\begin{aligned} |\varphi(t)| &\leq |x_0| + \int_{t_0}^t |f(s, \varphi(s))| ds \leq |x_0| + \int_{t_0}^t (M(s) + N(s) |\varphi(s)|) ds \\ &\leq |x_0| + \int_{t_0}^t M(s) ds + \int_{t_0}^t N(s) |\varphi(s)| ds \\ &\leq |x_0| + M_1(\beta - t_0) + \int_{t_0}^t N(s) |\varphi(s)| ds, \quad \forall t \in [t_0, \beta). \end{aligned}$$

Aplicando el lema de Gronwall a la desigualdad anterior obtenemos

$$|\varphi(t)| \leq [|x_0| + M_1(\beta - t_0)] \exp\{N_1(\beta - t)\}, \quad \forall t \in [t_0, \beta).$$

Esto muestra que $\varphi(t)$ pertenece a un compacto para todo $t \in [t_0, \beta)$. Por el teorema 2.8 se sigue que $\beta = b$, lo cual es una contradicción. ■

Corolario 2.11 Si $f \in C[J \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n]$ es globalmente Lipschitz, entonces las soluciones de (2.1) son globales; es decir están definidas sobre todo J .

Esto se sigue inmediatamente del teorema 2.10 y del hecho que

$$|f(t, x)| \leq |f(t, x) - f(t, 0)| + |f(t, 0)|, \quad \forall (t, x) \in J \times \mathbb{R}^n.$$

§ 2.3 Continuidad de las Soluciones Respecto a los Datos Iniciales.

Hasta el momento, siempre hemos fijado un punto $(t_0, x_0) \in J \times D$ y buscado luego la solución de (2.1). El objetivo de este párrafo consiste en estudiar el comportamiento de las soluciones de la E.D.O. (2.1) en relación con la variación de los datos iniciales. Si variamos “poco” los valores iniciales, cabe preguntarse :

- ¿ Cómo se comportarán las soluciones que corresponden a datos iniciales “cercaños” a (t_0, x_0) ?.
- ¿ Se mantendrán cercanas entre si dichas soluciones ?.
- Si esto sucede, ¿ sobre qué tipo de intervalos se mantendrá la cercanía ?.

Antes de precisar qué es lo que entenderemos por dependencia continua de las soluciones respecto a los datos iniciales, analicemos el siguiente:

Ejemplo 2.3 Sea $x' = x$ con $x(t_0) = x_0$. Denotemos con $x(t, t_0, x_0)$ a su solución. En este caso $x(t, t_0, x_0) = x_0 \exp(t - t_0)$ con $t \in \mathbb{R}$.

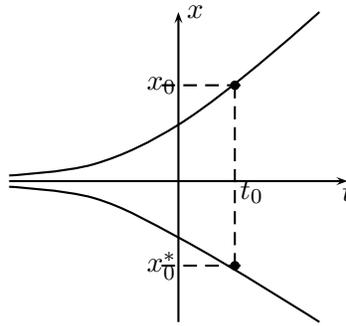


Figura 2.3

Es claro que x_0 y x_0^* pueden estar tan cercanos como se desee, sin embargo

$$|x(t, t_0, x_0) - x(t, t_0, x_0^*)| = \exp(t - t_0) |x_0 - x_0^*| \rightarrow +\infty, \text{ cuando } t \rightarrow +\infty.$$

Sea $J^* = [t_0 - T_1, t_0 + T_2]$, el cual obviamente está contenido en el dominio de $x(\cdot, t_0, x_0)$, para todo $T_1 > 0$, $T_2 > 0$. No es difícil observar que siendo $\varepsilon > 0$, un número dado, si $|x_0 - x_0^*| < \exp(-T_2)$, entonces $|x(t, t_0, x_0) - x(t, t_0, x_0^*)| < \varepsilon$, $\forall t \in J^*$.

Definición 2.1 Diremos que la solución $x(t, t_0, x_0)$ del P.V.I. (2.1)-(2.2) depende continuamente de los datos iniciales (t_0, x_0) , si dado $\varepsilon > 0$ y un intervalo cerrado cualquiera $J^* = [t_0 - T_1, t_0 + T_2]$ contenido en el dominio de $x(\cdot, t_0, x_0)$, existe un entorno $U = U(t_0, x_0)$ del punto (t_0, x_0) tal que para todo $(t_0^*, x_0^*) \in U$, la solución $x(t, t_0^*, x_0^*)$ está definida para todo $t \in J^*$ y además

$$|x(t, t_0, x_0) - x(t, t_0^*, x_0^*)| < \varepsilon, \quad \forall t \in J^*.$$

En lo que sigue, procederemos a mostrar que si las soluciones de (2.1) son únicas, entonces ellas dependen continuamente de los datos iniciales.

Lema 2.12 *Sea U un conjunto compacto contenido en $J \times D$. Entonces existen constantes $a > 0$ y $b > 0$ tales que el conjunto*

$$A = \bigcup_{(t_0, x_0) \in U} B(t_0, x_0) \quad \text{con} \quad B(t_0, x_0) = \{(t, x) : |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\},$$

es un subconjunto compacto de $J \times D$.

Demostración. Como $J \times D$ es abierto, para cada $(t_0, x_0) \in U$, existen constantes $\alpha > 0$ y $\beta > 0$, tales que el conjunto $\{(t, x) : |t - t_0| < \alpha, |x - x_0| < \beta\}$, está totalmente contenido en $J \times D$. Por lo tanto la unión de todos estos conjuntos forman un cubrimiento abierto de U . Así, en virtud del lema de Lebesgue, existen constantes $a^* > 0$ y $b^* > 0$, tales que eligiendo $0 < a < a^*$ y $0 < b < b^*$, obtenemos que $A \subset J \times D$.

Veamos que A es un conjunto compacto. Si $(t, x) \in A$, entonces existe un punto $(t_0, x_0) \in U$ tal que $|t - t_0| \leq a$ y $|x - x_0| \leq b$. Esto implica que

$$|t| \leq |t - t_0| + |t_0| \leq a + |t_0|, \quad |x| \leq |x - x_0| + |x_0| \leq b + |x_0|,$$

de donde se obtiene que A es un conjunto acotado, por serlo U .

Veamos ahora que A es un conjunto cerrado. Para ello sea $(t^*, x^*) \in \bar{A}$. Entonces existe una sucesión $\{(t_n, x_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$, tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} (t_n, x_n) = (t^*, x^*)$.

Por otra parte, es evidente que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un punto $(t_0^n, x_0^n) \in U$ tal que $|t_n - t_0^n| \leq a$ y $|x_n - x_0^n| \leq b$. Como la sucesión $\{(t_0^n, x_0^n)\}_{n \geq 1}$ está contenida en U , existe una subsucesión $\{(t_0^{n_k}, x_0^{n_k})\}_{k \geq 1}$ de $\{(t_0^n, x_0^n)\}_{n \geq 1}$ convergente en U . Llamemos $(\tilde{t}_0, \tilde{x}_0) \in U$ su punto límite. Entonces

$$\begin{aligned} |t^* - \tilde{t}_0| &\leq |t^* - t_{n_k}| + |t_{n_k} - t_0^{n_k}| + |t_0^{n_k} - \tilde{t}_0|, \\ |x^* - \tilde{x}_0| &\leq |x^* - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x_0^{n_k}| + |x_0^{n_k} - \tilde{x}_0|. \end{aligned}$$

Luego, pasando el límite con $n_k \rightarrow \infty$, obtenemos que $|t^* - \tilde{t}_0| \leq a$ y $|x^* - \tilde{x}_0| \leq b$ y con ello la prueba del lema. ■

Teorema 2.13 (Dependencia Continua de los Datos Iniciales)

Bajo las hipótesis del teorema de existencia y unicidad, las soluciones de (2.1) dependen continuamente de los datos iniciales.

Demostración. Consideremos un conjunto compacto $U \subseteq J \times D$. Sea A el conjunto compacto dado por el lema 2.12. Denotemos por $M = \max\{|f(t, x)| : (t, x) \in A\}$ y sea $K > 0$ la constante de Lipschitz de $f|_A$. Escojamos una constante $\delta > 0$ de manera que $\delta < \min\{a, b/M, 1/K\}$, con $a > 0$ y $b > 0$ las constantes dadas por el lema 2.12.

Consideremos el subconjunto C^* de $C[[-\delta, \delta], \mathbb{R}^n]$ formado por las funciones φ tales que:

- a) $\varphi(0) = 0$,
 b) $|\varphi(t)| \leq b, \forall t \in [-\delta, \delta]$.

Para cada $y = (t_0, x_0) \in U$, definamos sobre C^* un operador T_y de la manera siguiente:

$$T_y \varphi(t) := \int_{t_0}^{t+t_0} f(s, \varphi(s-t_0) + x_0) ds \quad , \quad t \in [-\delta, \delta].$$

Es claro que si φ es un punto fijo de T_y , entonces

$$\varphi'(t) = f(t+t_0, \varphi(t) + x_0),$$

de donde se sigue que $x(t) = \varphi(t-t_0) + x_0$ es solución del P.V.I. (2.1)-(2.2), para todo $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

Utilizando razonamientos análogos a los de la prueba del teorema 2.2, se obtiene que $T_y : C^* \rightarrow C^*$ es una contracción uniforme respecto a y , con $y \in U$. Por lo tanto, en virtud del teorema 1.3 se sigue que $\varphi(t, t_0, x_0)$ es continua en (t_0, x_0) sobre U , uniformemente en t con $t \in [-\delta, \delta]$. De donde a su vez concluimos que la función $x(t, t_0, x_0) = x_0 + \varphi(t-t_0; t_0, x_0)$ es continua en (t_0, x_0) sobre U , uniformemente en t , con $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$.

Sea ahora (t_0, x_0) un punto cualquiera en $J \times D$. Según el teorema 2.6, existe una única solución $x(t, t_0, x_0)$ no prolongable del P.V.I. (2.1)-(2.2), definida sobre un intervalo (α, β) ; con $a \leq \alpha, \beta \leq b$.

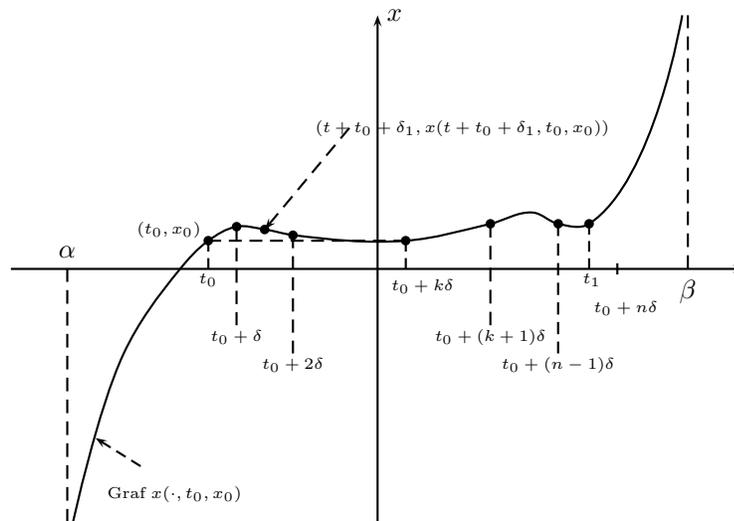


Figura 2.4

Sea $T \in (\alpha, \beta)$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $T > t_0$, el caso $T < t_0$ se analiza de manera análoga. Pongamos $U = \{(t, x(t, t_0, x_0)) : t \in [t_0, T]\}$, el cual

es un subconjunto compacto de $J \times D$. Por lo demostrado previamente, $x(t, \xi, \eta)$ es continua en (ξ, η) sobre U , uniformemente en t , con $t \in [\xi - \delta, \xi + \delta]$.

Para probar que $x(t, \xi, \eta)$ es continua en (ξ, η) uniformemente sobre $[t_0, T]$ particionemos el intervalo $[t_0, T]$ como sigue:

$$t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k = t_0 + k\delta < t_{k+1} < \cdots < t_{p-1} \leq T,$$

donde p es el menor entero positivo tal que $t_0 + (p - 1)\delta \leq T < t_0 + p\delta$.

Teniendo en cuenta la unicidad de las soluciones de (2.1)-(2.2), se sigue que :

$$x(t + t_1; t_0, x_0) = x(t + t_1; t_1, x(t_1; t_0, x_0)).$$

Lo cual implica que la continuidad de $x(t, t_0, x_0)$ en (t_0, x_0) es uniforme sobre el intervalo $[t_0, t_0 + 2\delta]$. Por lo tanto, $x(s; \xi, \eta)$ es continua en (ξ, η) sobre U , uniformemente en s , con $s \in [\xi - 2\delta, \xi + 2\delta] \cap [t_0, T]$.

Supongamos ahora que $x(s; \xi, \eta)$ es continua en (ξ, η) sobre U , uniformemente sobre $[\xi - k\delta, \xi + k\delta] \cap [t_0, T]$.

Nuevamente, por la unicidad, tenemos que

$$x(t + t_k; t_0, x_0) = x(t + t_k; t_k, x(t_k; t_0, x_0)),$$

lo cual implica la continuidad de $x(s; \xi, \eta)$ respecto de $(\xi, \eta) \in U$, uniformemente sobre el intervalo $[\xi - (k + 1)\delta, \xi + (k + 1)\delta] \cap [t_0, T]$. Esto concluye la prueba del teorema. ■

Supongamos que el campo vectorial f satisface las condiciones del teorema de existencia y unicidad. Sea (t_0, x_0) en $J \times D$ y denotemos por $(\alpha(t_0, x_0), \beta(t_0, x_0))$ al intervalo maximal de existencia y unicidad de $x(t, t_0, x_0)$. Definamos el siguiente conjunto :

$$\Omega(f) = \{(t, t_0, x_0) : \alpha(t_0, x_0) < t < \beta(t_0, x_0), (t_0, x_0) \in J \times D\}.$$

Al conjunto $\Omega(f)$ se le llama dominio de definición de $x(t, t_0, x_0)$.

A partir del teorema de existencia y unicidad y el teorema sobre la dependencia continua de las soluciones respecto a los datos iniciales, se sigue que $\Omega(f)$ es un conjunto abierto.

§ 2.4 Dependencia Continua de las Soluciones Respecto a Parámetros

Consideremos ahora el P.V.I., siguiente:

$$x'(t) = f(t, x, \mu), \tag{2.7}$$

$$x(t_0) = x_0. \tag{2.8}$$

El sistema (2.7) representa una de las formas en que puede aparecer un parámetro μ en las ecuaciones diferenciales. También podría estar multiplicando a $x'(t)$. En realidad (2.7) representa a una familia uni ó multiparamétrica de campos vectoriales.

Supongamos que para cada valor en el parámetro μ , el sistema (2.7)-(2.8), posee una única solución, la cual denotaremos por $x(t, t_0, x_0, \mu)$. Nuestro objetivo será averiguar bajo qué condiciones y para qué valores de t se satisface que

$$\lim_{\mu \rightarrow \mu_0} x(t, t_0, x_0, \mu) = x(t, t_0, x_0, \mu_0),$$

con los parámetros variando en un conjunto abierto $D_1 \subset \mathbb{R}^m$.

Ejemplo 2.4 Consideremos un circuito eléctrico formado por un condensador C y una inductancia L , conectados como se indica en la figura 2.5.

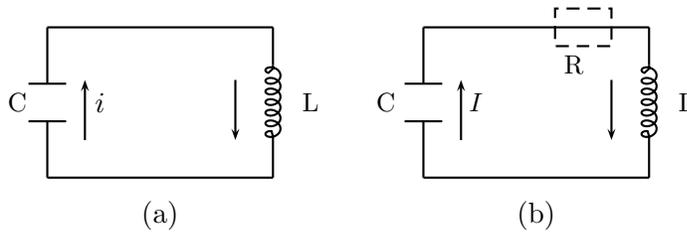


Figura 2.5

Despreciando la resistencia del conductor, la corriente $i(t)$ se determina resolviendo la ecuación diferencial

$$Li''(t) + \frac{1}{C}i(t) = 0. \quad (2.9)$$

En el caso que no despreciemos la resistencia R , la corriente $I(t)$ viene dada por

$$LI''(t) + RI'(t) + \frac{1}{C}I(t) = 0. \quad (2.10)$$

Analizando las expresiones de las soluciones de (2.9)-(2.10), veamos cuándo podemos despreciar R . Si nos interesamos por el comportamiento de las soluciones de (2.10) para R pequeño, podemos suponer sin perder generalidad que $0 \leq R < 2(\frac{L}{C})^{1/2}$.

Integrando (2.9) y (2.10) obtenemos que :

- a) $i(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$,
- b) $I(t) = A \exp(-\alpha t) \sin(\sqrt{\omega^2 - \alpha^2} t + \varphi)$,

donde A y φ , son constantes de integración, $\omega = (LC)^{-\frac{1}{2}}$ y $\alpha = R(2L)^{-1}$.

Es claro que por cercanos que estén los datos iniciales $(i(0), i'(0))$ e $(I(0), I'(0))$, incluso, siendo iguales, las funciones $i(t)$ e $I(t)$ no pueden permanecer cercanas para todo $t \geq 0$, ya que $i(t)$ es 2π -periódica, mientras que $I(t) \rightarrow 0$, si $t \rightarrow +\infty$, (ver figura 2.6).

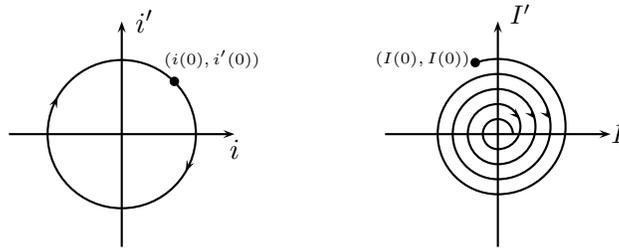


Figura 2.6

Este análisis nos permite concluir que no se puede despreciar la resistencia ejercida por la línea que conduce la corriente, por pequeña que sea, cuando $t \rightarrow +\infty$.

En lo que sigue mostraremos que el problema de la dependencia de las soluciones respecto a un parámetro, se reduce al estudio de la continuidad de las soluciones de un nuevo sistema de ecuaciones diferenciales equivalente al sistema original, respecto a los datos iniciales.

$$y = \begin{bmatrix} x \\ \mu \end{bmatrix}, \quad F(t, y) = \begin{bmatrix} f(t, x, \mu) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad y(t_0) = y_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ \mu_0 \end{bmatrix},$$

se obtiene que el P.V.I. (2.7)-(2.8) es equivalente al siguiente problema:

$$y' = F(t, y), \tag{2.11}$$

$$y(t_0) = y_0. \tag{2.12}$$

Teniendo en cuenta esta observación y el teorema de la dependencia continua de las soluciones respecto a los datos iniciales, es inmediato el siguiente:

Teorema 2.14 (*Dependencia Continua Respecto a Parámetros*). *Supongamos que se verifican las condiciones siguientes:*

- a) $f \in C[J \times D \times D_1, \mathbb{R}^n]$,
- b) *La función f es localmente Lipschitz respecto a su segunda y tercera variable.*

Entonces, para todo dato inicial $p_0 = (t_0, x_0, \mu_0) \in J \times D \times D_1$ y un intervalo compacto J^* contenido en el dominio de $x(\cdot, p_0)$, existe un entorno $U^* \equiv U^*(p_0)$ tal que para todo $p_0^* = (t_0^*, x_0^*, \mu_0^*) \in U^*$ se tiene que $\text{Dom } x(\cdot, p_0^*) \supset J^*$ y además $\lim_{p_0^* \rightarrow p_0} x(t, p_0^*) = x(t, p_0)$, uniformemente en t , sobre J^* .

§ 2.5 Derivabilidad de las Soluciones Respecto a los Datos Iniciales y a Parámetros

En esta sección mostraremos que las soluciones de (2.1) heredan las propiedades de suavidad que posea el campo vectorial $f(t, x)$, respecto de los datos iniciales.

Lema 2.15 *Sea D un subconjunto abierto y convexo de \mathbb{R}^n y $g \in C[J \times D, \mathbb{R}^n]$ tal que $\partial g/\partial x$ existe y es continua sobre $J \times D$.*

Entonces se verifica la siguiente identidad

$$g(t, x_2) - g(t, x_1) = \left(\int_0^1 \left\{ \frac{\partial g}{\partial x}(t, sx_2 + (1-s)x_1) \right\} ds \right) (x_2 - x_1), \quad (2.13)$$

para todo $(t, x_i) \in J \times D$, $i = 1, 2$.

Demostración. Definamos la función $F(s) = g(t, sx_2 + (1-s)x_1)$, $s \in [0, 1]$. Observemos que $F(0) = g(t, x_1)$ y $F(1) = g(t, x_2)$. Además, por las hipótesis del lema se sigue que $F(s)$ está bien definida en $[0, 1]$ y además se verifica que

$$F'(s) = \left[\frac{\partial g}{\partial x}(t, sx_2 + (1-s)x_1) \right] (x_2 - x_1). \quad (2.14)$$

Integrando (2.14) entre $s = 0$ y $s = 1$ obtenemos (2.13). ■

Teorema 2.16 *Supongamos que:*

- i) $f \in C[J \times D, \mathbb{R}^n]$,
- ii) $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe y es continua sobre $J \times D$.

Entonces la solución $x(t; t_0, x_0)$ del P.V.I. (2.1)-(2.2) es continuamente diferenciable en todas sus variables, en su dominio de definición. Además se verifica que :

- a) *La matriz $\frac{\partial x}{\partial x_0}(t, t_0, x_0)$ satisface la ecuación diferencial*

$$y' = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t, t_0, x_0)) \right] y \quad (2.15)$$

con $y(t_0) = I$. A la ecuación (2.15) se le llama ecuación diferencial variacional.

- b) *También se satisface que :*

$$\frac{\partial x}{\partial t_0}(t, t_0, x_0) = -\frac{\partial x}{\partial x_0}(t, t_0, x_0) f(t_0, x_0). \quad (2.16)$$

Demostración. Primero probaremos que $\frac{\partial x}{\partial x_0}(t, t_0, x_0)$ existe, que es continua y satisface (2.15). Para ello sea $h \neq 0$ un número real arbitrario y escribamos $e_k = (e_{1k}, \dots, e_{jk}, \dots, e_{nk})^T$, con $e_{jk} = \delta_{jk}$ el delta de Kronecker y con $(\cdot)^T$ indicamos vector traspuesto. Para mayor comodidad y sencillez en la notación en lo que sigue, pongamos $x(t, h) = x(t; t_0, x_0 + he_k)$ y $x_0(t) = x(t, t_0, x_0)$. Al ser el dominio de definición de $x(t, t_0, x_0)$ un conjunto abierto, podemos elegir h suficientemente pequeño de manera que $(x_0 + (1-s)he_k) \in D$, para todo $s \in [0, 1]$.

Teniendo en cuenta la definición de $x(t, h)$, se sigue que :

$$(x(t, h) - x_0(t))' = f(t, x(t, h)) - f(t, x_0(t)). \quad (2.17)$$

Aplicando el lema 2.15 a la parte derecha de la expresión (2.17), con $x_2 = x(t, h)$, $x_1 = x_0(t)$, obtenemos

$$(x(t, h) - x_0(t))' = \left[\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t, sx_2 + (1-s)x_1) ds \right] (x(t, h) - x_0(t)). \quad (2.18)$$

Poniendo

$$x_h(t) = \frac{x(t, h) - x_0(t)}{h}, \quad \text{con } h \neq 0,$$

vemos que $x_h(t)$ es solución de (2.18), con $x_h(t_0) = e_k$. Sea φ la única solución de (2.15) tal que $\varphi(t_0) = e_k$. Mostremos que $x_h(t) \rightarrow \varphi(t)$ cuando $h \rightarrow 0$, uniformemente en t sobre intervalos compactos contenidos en el dominio de $x_0(t)$.

Sabemos que

$$x_h(t) = e_k + \int_{t_0}^t \left[\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(\tau, sx_2 + (1-s)x_1) ds \right] x_h(\tau) d\tau,$$

y

$$\varphi(t) = e_k + \int_{t_0}^t \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\tau, x(\tau, t_0, x_0)) \right] \varphi(\tau) d\tau.$$

Así que

$$\begin{aligned} |x_h(t) - \varphi(t)| &\leq \left| \int_{t_0}^t \left| \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t, sx_2 + (1-s)x_1) ds \right| \cdot |x_h(t) - \varphi(t)| dt \right| \\ &+ \left| \int_{t_0}^t \left| \int_0^1 \left[\frac{\partial f}{\partial x}(t, sx_2 + (1-s)x_1) - \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t, t_0, x_0)) \right] ds \right| \cdot |\varphi(t)| dt \right|. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Sea J^* un intervalo compacto cualquiera contenido en el dominio de $x_0(t)$, tal que $t_0 \in J^*$.

Teniendo en cuenta que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t, sx_2 + (1-s)x_1) ds = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t, t_0, x_0)),$$

uniformemente en t , sobre J^* ; se sigue que : dado $\varepsilon > 0$, existe un $h_0 > 0$ tal que si $|h| < h_0$, entonces

$$\left| \int_0^1 \left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, sx_2 + (1-s)x_1) - \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t, t_0, x_0)) \right| ds \right| < \varepsilon; \quad (2.20)$$

para cada $t \in J^*$.

Pongamos

$$M = \max \left\{ \left| \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t, sx_2 + (1-s)x_1) ds \right| : t \in J^*, h \in [-h_0, h_0] \right\}. \quad (2.21)$$

Por lo tanto, en virtud de (2.18), (2.20) y (2.21), obtenemos

$$|x_h(t) - \varphi(t)| \leq \varepsilon M_1 \gamma + \left| \int_{t_0}^t M |x_h(t) - \varphi(t)| dt \right| \quad \forall t \in J^*;$$

donde $M_1 = \max_{t \in J^*} |\varphi(t)|$, y γ = longitud de J^* .

Finalmente, aplicando el lema de Gronwall en la desigualdad previa, se tiene que

$$|x_h(t) - \varphi(t)| \leq \varepsilon M_1 \gamma \exp(M\gamma),$$

Lo cual prueba la primera parte de nuestra afirmación, ya que ε es arbitrario.

Probemos ahora que $\frac{\partial x}{\partial t_0}$ existe, es continua y viene dada por la expresión (2.16). Sea $h \neq 0$ suficientemente pequeño y defínase:

$$\tilde{x}_h(t) = \frac{x(t, t_0 + h, x_0) - x(t, t_0, x_0)}{h}.$$

Por la unicidad de las soluciones, tenemos que

$$x(t, t_0, x_0) = x(t, t_0 + h, x(t_0 + h, t_0, x_0)).$$

Así

$$\tilde{x}_h(t) = \frac{1}{h} [x(t, t_0 + h, x_0) - x(t, t_0 + h, x(t_0 + h, t_0, x_0))] \quad (2.22)$$

Aplicando el lema 2.14 a (2.22), obtenemos que:

$$\tilde{x}_h(t) = \frac{1}{h} \left[\int_0^1 \frac{\partial x}{\partial x_0}(t, t_0 + h, sx_0 + (1-s)x(t_0 + h, t_0, x_0)) ds \right] (x_0 - x(t_0 + h, t_0, x_0))$$

$$= - \left[\int_0^1 \frac{\partial x}{\partial x_0}(t, t_0 + h, sx_0 + (1-s)x(t_0 + h, t_0, x_0)) ds \right] \int_0^1 x(t_0 + (1-s)h, t_0, x_0) ds,$$

De esta expresión, haciendo tender $h \rightarrow 0$, obtenemos el resultado deseado. ■

Consideremos el P.V.I. $x' = f(t, x, \mu)$, $x(t_0) = x_0$, y denotemos por $x(t, t_0, x_0, \mu)$ a su solución.

Teniendo en cuenta que (2.7)-(2.8) es equivalente al sistema (2.11) con $y(t_0) = y_0$, se sigue del teorema 2.16 el siguiente:

Corolario 2.17 Si $f \in C[J \times D \times D_1, \mathbb{R}^n]$ y $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial \mu}$ existen y son continuas sobre $J \times D \times D_1$, entonces $x(t, t_0, x_0, \mu)$ es continuamente diferenciable en todas sus variables. Además se tiene que :

a) La matriz $\frac{\partial x}{\partial x_0}(t, t_0, x_0, \mu)$ satisface a la ecuación diferencial variacional

$$y' = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t, t_0, x_0, \mu), \mu) \right] y$$

con $y(t_0) = I$.

b) La matriz $\frac{\partial x}{\partial \mu}(t, t_0, x_0, \mu)$ es solución de:

$$y' = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t, t_0, x_0, \mu), \mu) \right] y + \frac{\partial f}{\partial \mu}(t, x(t, t_0, x_0, \mu), \mu)$$

con $y(t_0) = 0$.

c)

$$\frac{\partial x}{\partial t_0}(t, t_0, x_0, \mu) = - \frac{\partial x}{\partial x_0}(t, t_0, x_0, \mu) f(t_0, x_0, \mu).$$

§ 2.6 E.D.O. con Parte Derecha Discontinua

En los párrafos 2.1-2.5, solo hemos considerado campos vectoriales continuos. Bajo esta condición el P.V.I.(2.1)-(2.2) es equivalente a la ecuación integral

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

En la teoría de control automático, teoría de óptimo, etc., surge la necesidad de considerar campos vectoriales en general discontinuos en t . En este párrafo estudiaremos E.D.O., cuyo campo vectorial pertenece a una clase más general, que la considerada hasta el momento.

Definición 2.2 (Condición de Caratheodory)

Se dice que $f : J \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisface la condición de Caratheodory sobre $J \times D$, si :

- a) Para cada $x \in D$, la función $f(\cdot, x)$ es medible Lebesgue.
- b) Para cada $t \in J$, $f(t, \cdot)$ es continua.
- c) Para todo conjunto compacto $U \subset J \times D$, existe una función $m \in L^1$, tal que

$$|f(t, x)| \leq m(t), \quad \forall (t, x) \in U.$$

No es difícil mostrar que la condición (c) es equivalente a la siguiente:

- d) Para todo $p \in J \times D$, existe un entorno U^* del punto p y una función $m^* \in L^1$, tales que:

$$|f(t, x)| \leq m^*(t), \quad \text{para cada } (t, x) \in \bar{U}^*; \quad \text{con } \bar{U}^* \subset J \times D.$$

Notemos que, si f satisface la condición de Caratheodory, entonces toda solución de la ecuación integral (2.3) es absolutamente continua. Por esta razón, debemos pensar a las soluciones de la E.D.O., en un sentido generalizado. Más precisamente, diremos que $\varphi : J_1 \rightarrow D$ es solución de $x' = f(t, x)$, con $x(t_0) = x_0$; si φ es absolutamente continua y satisface a la E.D.O., excepto sobre un conjunto de medida nula, y $\varphi(t_0) = x_0$.

El siguiente teorema es el análogo del teorema de Peano.

Teorema 2.18 (Caratheodory) *Si f satisface la condición de Caratheodory sobre $J \times D$, entonces el P.V.I, (2.1)-(2.2) posee al menos una solución.*

Idea de la demostración.

Sea U un compacto cualquiera de $J \times D$, tal que $(t_0, x_0) \in \overset{\circ}{U}$. Sea $m \in L^1$, la función dada por la condición de Caratheodory. Elija $a > 0$ y $b > 0$ de modo que

$$D = \{(t, x) : |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\} \subset U.$$

Escoja una constante δ de forma que $0 < \delta < a$ y $\int_{t_0}^{t_0+\delta} m(s)ds \leq b$.

El resto de la demostración es exactamente igual a la prueba del Teorema Peano.

El teorema 2.18, no garantiza en general la unicidad de las soluciones, para ello es necesario imponer alguna condición adicional a f .

Definición 2.3 (Condición de Lipschitz Generalizada) Diremos que $f : J \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisface la condición de Lipschitz generalizada, si para cada conjunto compacto $U \subset J \times D$, existe una función $k \in L^1$, tal que

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq k(t)|x_1 - x_2|,$$

para cada (t, x_1) y $(t, x_2) \in U$.

Teorema 2.19 (Existencia y Unicidad de Soluciones no Prolongables)

Supongamos que:

- a) f satisface la condición de Caratheodory.
- b) f verifica la condición de Lipschitz generalizada. Entonces el P.V.I. (2.1)-(2.2) posee una única solución no prolongable, definida sobre (α, β) , con $a \leq \alpha$ y $\beta \leq b$.

Esbozo de la prueba

Primero se prueba la existencia y unicidad local. Para ello se fija un compacto U , como en el teorema 2.18 (Caratheodory). Sean m y k en L^1 , las funciones dadas por la condición de Caratheodory y Lipschitz generalizada, respectivamente. Sean $a > 0$ y $b > 0$, tales que $D = \{(t, x) : |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\} \subset U$. Eligiendo una constante de modo que $0 < \delta < a$, $\int_{t_0}^{t_0+\delta} m(s)ds \leq b$ y $\int_{t_0}^{t_0+\delta} k(s)ds < 1$ postulando exactamente igual que en la prueba del teorema 2.2, se obtiene la existencia y unicidad local.

§ 2.7 Ejercicios y Problemas

1. Estudie la existencia y unicidad de las soluciones de los siguientes P.V.I.:

- a) $x' = x^{\frac{1}{3}}$, $x(0) = x_0$.
- b) $x' = \frac{1}{x}$, $x(0) = 1$.
- c) $x' = 1 + x^2$, $x(0) = 0$.
- d) $x' = \frac{xy}{1 + x^2 + y^2}$,
 $y' = \frac{1}{1 + x^2}$,
 $x(0) = y(0) = 0$.
- e) $(\cos t)x' + (\sin t)x = 1$, $x(0) = 1$.
- f) $2t \ln|x| - 1 + \frac{t^2 + 1}{x}x' = 0$, $x(2) = -e$.

2. Muestre que la condición de Lipschitz, no es una condición necesaria para la unicidad.

Indicación: Integre las siguientes ecuaciones diferenciales:

- i) $x' = 1 + x^{\frac{2}{3}}$, $x(0) = 0$.
- ii) $x' = g(x)$, $x(0) = x_0$, donde

$$g(x) = \begin{cases} x \ln \frac{1}{|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

- 3. Considere el siguiente sistema $x' = g(x)$, $y' = f(x)y$ donde $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función globalmente Lipschitz y $f \in C[\mathbb{R}^n, \mathbb{R}]$. Pruebe que todas las soluciones de este sistema están definidas sobre \mathbb{R} .
- 4. Sea $f \in C^1[\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n]$ una función acotada. Muestre que el sistema $x' = f(x)$ con $x(0) = x_0$, posee una única solución definida sobre todo \mathbb{R} ; y además es dos veces continuamente diferenciable.
- 5. Pruebe que todas las soluciones de las ecuaciones de Van der Pol

$$x'' + \varepsilon(x^2 - 1)x' + x = 0, \quad \varepsilon > 0,$$

son prolongables a $+\infty$. Indicación: reduzca la ecuación a un sistema bidimensional y estime el crecimiento de la norma (euclídea) al cuadrado de las soluciones.

6. Supongamos que existe una función $k \in L^1(J, \mathbb{R}_0^+)$ tal que

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq k(t)|x - y|, \quad \forall (t, x), (t, y) \in J \times \mathbb{R}^n.$$

Si $x' = f(t, x)$ posee soluciones, entonces ellas están definidas sobre J .

7. Sea $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Si φ es una solución no prolongable del P.V.I. $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$, definida sobre (α, β) , $(-\infty < \alpha < \beta < +\infty)$, entonces $\lim_{t \rightarrow \beta^-} |\varphi(t)| = +\infty$, $\lim_{t \rightarrow \alpha^+} |\varphi(t)| = +\infty$.

8. Sea $f \in C[\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n]$ tal que $|f(t, x)| \leq k(t)\delta(|x|)$, para todo $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$; donde $k \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}_0^+)$, $\delta \in C[\mathbb{R}_0^+, \mathbb{R}_0^+]$, $\delta(0) = 0$, $\delta(v) > 0 \forall v > 0$ y $\int_0^\infty \frac{dv}{\delta(v)} = \infty$.

Pruebe que todas las soluciones del sistema $x' = f(t, x)$ son prolongables a $+\infty$.

Indicación: Estime el crecimiento de la función $v^2 = \langle x, x \rangle$ a lo largo de las soluciones del sistema.

9. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y acotada. Sea $\varphi_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una sucesión de soluciones de la E.D.O. $x' = f(x)$.

Pruebe que: si φ_n converge para algún $t^* \in [0, 1]$, entonces existe una subsucesión, que converge a una solución de $x' = f(x)$.

Indicación: aplique el lema de Arzela-Ascoli al conjunto $H = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$.

10. Sea $x'(t) = 2t + \mu x^2$, $x(t_0) = x_0$, y Denotemos su solución por $x(t, t_0, x_0, \mu)$. Halle $\frac{\partial x(t, t_0, x_0, \mu)}{\partial \mu}$ en el punto $(t, 0, -1, 0)$.

11. Sea $x'' + 3x' = 2 \sin t + \mu(x')^2$, $x(t_0) = x_0$, $x'(t_0) = x$. Halle $\frac{\partial x}{\partial x_0}$, $\frac{\partial x}{\partial x'_0}$, $\frac{\partial x}{\partial \mu}$ en el punto $(t, 0, 0, 0, 0)$.

12. Muestre que : Si el sistema $x' = f(x)$ admite soluciones no prolongables a $+\infty$, entonces existe un cambio de la variable independiente, tal que las soluciones del sistema transformado son prolongables a $+\infty$.

Indicación: Ponga

$$u(t) = \int_0^t \sqrt{1 + |f(\varphi(s))|^2} ds \quad , \quad t \in [0, \beta) \quad , \quad \beta < +\infty.$$

13. Supongamos que existe $k \in C[J, \mathbb{R}^+]$, tal que

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq k(t)|x - y|, \forall (t, x), (t, y) \in J \times \mathbb{R}^n.$$

Demuestre que si f es continua en t , entonces el P.V.I $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$, posee una única solución definida $\forall t \in J$.

14. Estudie la prolongabilidad a $\pm\infty$ de las soluciones de las siguientes ecuaciones $x' = 1 + x^2$, $x' = x^2 \pm t^2$.

Capítulo 3

Sistemas Lineales

En este capítulo estudiaremos sistemas lineales de ecuaciones diferenciales ordinarias. En esta caso se puede obtener información mas detallada sobre el comportamiento de sus soluciones, la cual será muy útil al momento de estudiar la dinámica de ecuaciones diferenciales no lineales.

Un sistema de la forma

$$x' = A(t)x, \tag{3.1}$$

se denomina lineal homogéneo y uno del tipo

$$y' = A(t)y + f(t), \tag{3.2}$$

se denomina sistema lineal no homogéneo; donde $A \in C[J, \mathbb{R}^{n \times n}]$ y $f \in C[J, \mathbb{R}^n]$.

Mostremos que (3.2) admite una única solución para cualquier problema de valor inicial. En efecto, denotemos por $F(t, y) = A(t)y + f(t)$. Como A y f son continuas, se sigue que F también es continua y se verifica que

$$|F(t, y)| \leq \|A(t)\| |y| + |f(t)|, \forall (t, y) \in J \times \mathbb{R}^n,$$

entonces por el teorema de prolongación global 2.10, se sigue que (3.2) admite una única solución definida sobre el intervalo J . En otras palabras el intervalo de continuidad de las funciones $A(t)$ y $f(t)$ determina el intervalo maximal de existencia y unicidad de las soluciones del sistema (3.2).

§ 3.1 Sistemas Lineales Homogéneos

Lema 3.1 *Con las operaciones usuales de suma y producto por un escalar de funciones el conjunto $\sum = \{\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ tal que } \varphi \text{ satisface (3.1)}\}$ es un espacio vectorial de dimensión n .*

Demostración. Es obvio que \sum es un subespacio vectorial del espacio $C[J, \mathbb{R}^n]$. Mostremos que \sum es isomorfo a \mathbb{R}^n . Para ello consideremos los siguientes P.V.I.

$$x' = A(t)x \quad , \quad x(t_0) = e_j \quad ,$$

donde $\{e_j\}_{j=1}^n$ es la base canónica de \mathbb{R}^n . Es claro que para cada j existe una única solución del P.V.I., a esta solución la denotaremos por φ_j . Entonces $\varphi_j \in \sum$, y el operador $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \sum$, definido por $Te_j = \varphi_j$, induce un isomorfismo entre \mathbb{R}^n y \sum . En efecto, si $x_0 \in \mathbb{R}^n$, existen constantes c_1, \dots, c_n , tales que $x_0 = \sum_{i=1}^n c_i e_i$. Luego por ser T lineal, $Tx_0 = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i$. Definiendo $\varphi(t) = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i$, obtenemos que $\varphi \in \sum$ y satisface la condición inicial $x(t_0) = x_0$. ■

Teniendo en cuenta la prueba del lema 3.1 y el hecho que un isomorfismo envía bases en bases, se sigue que $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ es una base del sub-espacio vectorial \sum .

Definición 3.1 A cualquier conjunto de funciones $\varphi_j \in \Sigma$, $j = 1, \dots, n$; que sea base de Σ lo llamaremos sistema fundamental de soluciones del sistema (3.1).

Definición 3.2 A la matriz $\Phi : J \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ cuyas columnas sean las componentes de alguna base de Σ se le llama matriz fundamental del sistema (3.1). Si además $\Phi(t_0) = I$, entonces Φ se llama matriz fundamental principal.

De la definición de matriz fundamental se sigue inmediatamente que $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$. Entonces toda solución del sistema homogéneo (3.1), tiene la forma $x(t) = \Phi(t)C$, donde C es un vector constante en \mathbb{R}^n a determinar. En particular, $x(t_0) = x_0 = \Phi(t_0)C$. De allí que $C = \Phi^{-1}(t_0)x_0$. Así, la única solución del sistema lineal homogéneo (3.1) tal que $x(t_0) = x_0$, viene dada por la expresión

$$x(t, t_0, x_0) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}x_0. \quad (3.3)$$

A la matriz $K(t, t_0) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}$, se le llama matriz de transición (operador de evolución) del sistema (3.1). Además, el operador de evolución $K(t, t_0)$ satisface las propiedades siguientes:

- a) La matriz de transición es única.
- b) $K(t, t_0) = K(t, s)K(s, t_0)$, $\forall t_0 \leq s \leq t$, (propiedad semigrupal).
- c) $K^{-1}(t, t_0) = K(t_0, t)$,
- d) $K(t_0, t_0) = I$,
- e) $\frac{\partial K}{\partial t}(t, t_0) = A(t)K(t, t_0)$.

Una propiedad bien interesante de las matrices soluciones del sistema (3.1) es que ellas son siempre singulares o no-singulares. Es decir, es suficiente que una matriz solución sea no singular en un instante t_0 para que ella sea no singular para todo t en \mathbb{R} . Esta afirmación se sigue inmediatamente del siguiente :

Teorema 3.2 (Liouville). Sea $\Phi(t)$ una matriz solución del sistema (3.1). Entonces

$$W(t) = \det \Phi(t) = W(t_0)e^{\int_{t_0}^t \text{tr} A(s) ds}, \forall t \in J.$$

A la función $W(t)$ se le llama el Wronskiano de Φ ; y, $\text{tr} A = (\text{traza } A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$.

Demostración. Se sabe que

$$W'(t) = (\det \Phi(t))' = \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi'_{i1} & \cdots & \varphi'_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{n1} & \cdots & \varphi_{nn} \end{vmatrix}, \text{ donde } \Phi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{i1} & \cdots & \varphi_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{n1} & \cdots & \varphi_{nn} \end{pmatrix}.$$

Como Φ es una matriz solución del sistema (3.1), se tiene que $\Phi' = A(t)\Phi$. De donde se sigue que $\varphi'_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}\varphi_{kj}$. Sustituyendo estas expresiones en el determinante

$$\begin{vmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi'_{i1} & \cdots & \varphi'_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{n1} & \cdots & \varphi_{nn} \end{vmatrix},$$

multiplicando la primera fila por $-a_{i1}$, la segunda por $-a_{i2}$ y así sucesivamente, excepto la i -ésima fila; y sumándoselas a la i -ésima fila, obtenemos que

$$\begin{vmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi'_{i1} & \cdots & \varphi'_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{n1} & \cdots & \varphi_{nn} \end{vmatrix} = a_{ii}W(t).$$

Lo cual inmediatamente implica que $W'(t) = \text{tr}A(t)W(t)$. Esto prueba nuestra afirmación. ■

Supongamos ahora que $A(t)$ es una matriz constante y la seguiremos denotando con la misma letra. Pongamos

$$e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!}.$$

Teniendo en cuenta que

- i) $\frac{\|A^n t^n\|}{n!} \leq \frac{\|A\|^n |t|^n}{n!}$
- ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A\|^n |t|^n}{n!} < \infty,$

se sigue que e^{At} está bien definida. Más aún como $\sum_{n=0}^{\infty} A^n t^n / n!$ converge uniformemente sobre compactos, cada término de la serie es infinitamente diferenciable y la serie de las derivadas término a término, también es uniformemente convergente, obtenemos que $\Phi(t) = e^{At}$ satisface la ecuación matricial lineal homogénea

$$\Phi'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{A^n t^{n-1}}{n!} = A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^{n-1} t^{n-1}}{(n-1)!} = A\Phi(t),$$

y

$$\Phi(0) = I_{n \times n}.$$

Así, hemos mostrado que para sistemas lineales a coeficientes constantes la matriz fundamental principal viene dada por $\Phi(t) = e^{At}$.

§ 3.2 Sistemas Lineales No-Homogéneos

Consideremos el sistema lineal no homogéneo (3.2). Específicamente, nuestra intención es la de hallar una expresión para las soluciones de (3.2), en términos de las soluciones del sistema lineal homogéneo (3.1). El método que emplearemos para nuestro propósito es el método de variación de parámetros.

Sea $\Phi(t)$ la matriz fundamental del sistema (3.1). Busquemos las condiciones que debe satisfacer la función $C : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ para que $y(t) = \Phi(t)C(t)$, $t \in J$, sea solución del sistema (3.2). Luego, derivando y reemplazando $y(t) = \Phi(t)C(t)$ en (3.2) obtenemos que :

$$\Phi'(t)C(t) + \Phi(t)C'(t) = A(t)\Phi(t)C(t) + f(t) \quad , \quad t \in J.$$

Teniendo en cuenta que $\Phi' = A(t)\Phi$, se sigue que

$$\Phi(t)C'(t) = f(t) \quad , \quad t \in J.$$

Integrando esta expresión obtenemos que : $y(t) = \Phi(t)C(t)$ es solución del sistema (3.2) si y solo si

$$C(t) = C_0 + \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)f(s) ds \quad , \quad t \in J,$$

para cierta constante $C_0 \in \mathbb{R}^n$.

Así, la expresión general para las soluciones de (3.2) es

$$y(t) = \Phi(t)C_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)f(s) ds \quad , \quad t \in J. \quad (3.4)$$

Si además de (3.2) tenemos el dato inicial $y(t_0) = y_0$, entonces $C_0 = \Phi^{-1}(t_0)y_0$; y la única solución de (3.2) que satisface la condición inicial $y(t_0) = y_0$ viene dada por

$$y(t, t_0, y_0) = K(t, t_0)y_0 + \int_{t_0}^t K(t, s)f(s) ds \quad , \quad t \in J. \quad (3.5)$$

§ 3.3 Sistemas Lineal Conjugado

Definición 3.3 Diremos que dos funciones $x(t)$ y $z(t)$ son conjugadas, si

$$\langle x(t), z(t) \rangle = cte,$$

para todo $t \in J$. Aquí, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota al producto interior de \mathbb{R}^n .

Sea $x(t)$ una solución del sistema (3.1) y $z(t)$ una función diferenciable. Si $x(t)$ y $z(t)$ son funciones conjugadas, entonces

$$\langle x'(t), z(t) \rangle + \langle x(t), z'(t) \rangle = 0, \quad t \in J.$$

Luego, como $x(t)$ es solución de (3.1) se sigue que

$$\langle x(t), A^T(t)z(t) + z'(t) \rangle = 0, \quad t \in J,$$

y para toda solución $x(t)$ de (3.1). Lo cual implica que necesariamente $z(t)$ debe satisfacer la siguiente ecuación diferencial

$$z'(t) = -A^T(t)z(t), \quad t \in J. \tag{3.6}$$

Al sistema (3.6) se le llama sistema lineal conjugado.

Sea $\Phi(t)$ la matriz fundamental del sistema (3.1). Derivando la identidad

$$\Phi(t)\Phi^{-1}(t) = I,$$

se obtiene que

$$0 = \Phi'\Phi^{-1} + \Phi(\Phi^{-1})' = A(t) + \Phi(\Phi^{-1})'$$

De donde se sigue que

$$(\Phi^{-1})' = -\Phi^{-1}A(t), \quad t \in J.$$

Es decir, $(\Phi^T)^{-1}$ es la matriz fundamental del sistema lineal conjugado (3.6).

Observación 3.1 En teoría de control óptimo y en programación lineal, frecuentemente asociado al problema que se desea resolver, se plantea otro problema llamado Problema Dual. En algunas teorías este problema dual se obtiene o viene a dar condiciones necesarias para resolver el problema original. Es de destacar aquí que tales problemas duales son en realidad los sistema conjugados asociados al sistema original.

§ 3.4 Sistemas Reducibles

Definición 3.4 Diremos que el sistema (3.1) es reducible, si existe una matriz $L \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n \times n})$, no singular, con L y L' acotadas, tal que la transformación $x = L(t)z$, reduce el sistema (3.1) a un sistema con coeficientes constantes de la forma $z' = Bz$, donde $B = L^{-1}(AL - L')$.

Una vez vistas las ventajas que presentan los sistemas lineales a coeficientes constantes resulta natural buscar condiciones que permitan caracterizar a los sistemas reducibles. En este sentido tenemos el siguiente :

Teorema 3.3 (Erugin) *El sistema (3.1) es reducible si y sólo si la matriz de transición del sistema (3.1) se puede expresar como :*

$$K(t, t_0) = L(t)e^{B(t-t_0)}L^{-1}(t_0), \quad (3.7)$$

para alguna matriz constante B .

Demostración. Supongamos que el sistema (3.1) es reducible al sistema $z' = Bz$, mediante la transformación $x = L(t)z$. Definamos $\Phi(t) = L(t)e^{Bt}$. Derivando Φ y teniendo en cuenta que $L' = AL - LB$, obtenemos que

$$\Phi' = L'e^{Bt} + LB e^{Bt} = AL e^{Bt} = A\Phi.$$

Lo cual muestra que $\Phi(t) = L(t)e^{Bt}$ es matriz fundamental del sistema (3.1). Luego, la matriz de transición de (3.1) satisface (3.7). En efecto,

$$K(t, t_0) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0) = L(t)e^{Bt}e^{-Bt_0}L^{-1}(t_0) \quad .$$

Probemos ahora la suficiencia. Supongamos que se satisface la relación (3.7) y definamos $x = L(t)z$. Entonces $x' = L'(t)z + L(t)z'$. De (3.1) y la expresión anterior, se obtiene que

$$L(t)z' = A(t)x(t) - L'(t)z = [A(t)L(t) - L'(t)]z.$$

Lo cual implica que

$$z' = L^{-1}(t)[A(t)L(t) - L'(t)]z. \quad (3.8)$$

De (3.7), se sigue que :

$$L(t) = K(t, t_0)L(t_0)e^{-B(t-t_0)}.$$

y

$$L'(t) = A(t)K(t, t_0)L(t_0)e^{-B(t-t_0)} - K(t, t_0)L(t_0)Be^{-B(t-t_0)} = A(t)L(t) - L(t)B.$$

Finalmente, sustituyendo $L(t)$ y $L'(t)$ en la ecuación (3.8), obtenemos que $z' = Bz$. Lo cual prueba la reducibilidad del sistema (3.1) ■

§ 3.5 Sistemas Lineales Homogéneos a Coeficientes Periódicos

La búsqueda de soluciones periódicas para sistemas del tipo $y' = f(t, y)$ es equivalente a resolver un problema de frontera del tipo $y(0) = y(\omega)$, donde $\omega > 0$ representa el período de la solución buscada. Este tipo de problemas es de gran importancia práctica.

En este párrafo consideraremos el sistema (3.1) bajo la condición adicional que $A(t)$ es una matriz ω -periódica. En este caso decimos que el sistema (3.1) es ω -periódico. Mostraremos que los sistemas lineales ω -periódicos son reducibles a sistemas con coeficientes constantes.

Probemos en primer lugar el siguiente lema auxiliar.

Lema 3.4 *Sea C una matriz real e invertible. Entonces, existe una matriz B , en general compleja, tal que $e^B = C$.*

Demostración. Dada la matriz C , denotemos por $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ sus autovalores. Entonces existe una matriz invertible T tal que $T^{-1}CT = J$, donde $J := \text{diag}[J_1, \dots, J_m]$, $J_i = \lambda_i I + S$ y S es una matriz nilpotente del tipo

$$S := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observemos que es suficiente probar el lema para un bloque elemental de Jordan. En efecto, si para cada $i = 1, \dots, m$, existe una matriz B_i tal que $J_i = e^{B_i}$, entonces

$$\begin{aligned} C &= TJT^{-1} = T \text{diag}[J_1, \dots, J_m]T^{-1} = T \text{diag}[e^{B_1}, \dots, e^{B_m}]T^{-1} \\ &= Te^{\tilde{B}}T^{-1} = e^{T\tilde{B}T^{-1}} = e^B, \end{aligned}$$

donde $\tilde{B} = \text{diag}[B_1, \dots, B_m]$ y $B = T\tilde{B}T^{-1}$.

Luego, podemos suponer sin perder generalidad, que la matriz C tiene la forma $C = \lambda I + S$, ($\lambda \neq 0$), o bien $C = \lambda(I + \frac{S}{\lambda})$. Pongamos ahora

$$B = (\ln \lambda)I + \ln(I + \frac{S}{\lambda}).$$

La matriz B está bien definida, ya que al ser S una matriz nilpotente existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $S^k = 0$, $\forall k \geq p + 1$, lo cual implica que

$$S_1 = \ln(I + \frac{S}{\lambda}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} S^k}{k \lambda^k} = \sum_{k=1}^p \frac{(-1)^{k+1} S^k}{k \lambda^k}.$$

Por otra parte,

$$e^B = e^{(\ln \lambda)I + S_1} = \lambda e^{S_1} = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S_1^k}{k!} = \lambda \sum_{k=0}^p \frac{S_1^k}{k!}.$$

Sustituyendo en la expresión anterior el desarrollo de S_1 y después de un tedioso cálculo se obtiene que $e^B = \lambda(I + S/\lambda) = C$. ■

Observación 3.2 La matriz B no está determinada de manera única, puesto que si $e^B = C$, también es cierto que para la matriz $B_1 = B + (2k\pi i)I$, ($k \in \mathbb{N}$) se satisface que $e^{B_1} = C$.

Teorema 3.5 (Floquet 1883) Si $\Phi(t)$ es una matriz fundamental del sistema ω -periódico (3.1), entonces existe una matriz invertible $P \in C^1[\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n \times n}]$ tal que $P(t + \omega) = P(t)$ y una matriz constante B tal que

$$\Phi(t) = P(t)e^{Bt}. \quad (3.9)$$

Demostración. Supongamos en primer lugar que $\Phi(0) = I$. Teniendo en cuenta la periodicidad de la matriz $A(t)$ se tiene que $\Phi'(t + \omega) = A(t + \omega)\Phi(t + \omega) = A(t)\Phi(t + \omega)$, lo cual implica que $\Phi(t + \omega)$ también es una matriz fundamental del sistema (3.1) y por tanto, existe una matriz constante C tal que $\Phi(t + \omega) = \Phi(t)C$. Luego, poniendo $t = 0$ se obtiene que $\Phi(\omega) = \Phi(0)C = C$ y por tanto $\Phi(t + \omega) = \Phi(t)\Phi(\omega)$, de donde se obtiene que $\Phi(t) = \Phi(t + \omega)\Phi^{-1}(\omega)$. Por ser $\Phi(\omega)$ una matriz no singular, por el lema 3.4, existe una matriz B tal que $\Phi(\omega) = e^{B\omega}$. Definamos $P(t) = \Phi(t)e^{-Bt}$. Evidentemente $P(t)$ es una matriz invertible y satisface (3.9). Mostremos que P es ω -periódica

$$P(t + \omega) = \Phi(t + \omega)e^{-B(t + \omega)} = \Phi(t + \omega)\Phi^{-1}(\omega)e^{-Bt} = \Phi(t)e^{-Bt} = P(t).$$

Sea ahora Φ_1 una matriz fundamental arbitraria del sistema (3.1). Luego se tiene que

$$\begin{aligned} \Phi_1(t) &= \Phi(t)\Phi_1(0) = P(t)e^{Bt}\Phi_1(0) = P(t)\Phi_1(0)\Phi_1^{-1}(0)e^{Bt}\Phi_1(0) \\ &= P(t)\Phi_1(0)e^{\Phi_1^{-1}(0)Bt\Phi_1(0)}. \end{aligned}$$

Denotando con $P_1(t) = P(t)\Phi_1(0)$, $B_1 = \Phi_1^{-1}(0)B\Phi_1(0)$, obtenemos que $\Phi_1(t) = P_1(t)e^{B_1 t}$. Lo cual concluye la prueba del teorema. ■

A partir de los teoremas de Erugin y Floquet realizando la transformación $x(t) = P(t)z$, obtenemos como una consecuencia inmediata el siguiente:

Corolario 3.6 Todo sistema ω -periódico es reducible a un sistema con coeficientes constantes.

Se sabe que si $\Phi(t)$ es una matriz fundamental de (3.1), $\Phi(t + \omega)$ también lo es. Por lo tanto existe una matriz invertible C tal que $\Phi(t + \omega) = \Phi(t)C$. A la matriz C se le llama matriz de monodromía.

Definición 3.5 A los autovalores de la matriz C los llamaremos multiplicadores característicos del sistema (3.1).

Mostremos que los multiplicadores característicos no dependen de la elección de la matriz fundamental. En efecto, sean Φ y Ψ dos matrices fundamentales de (3.1). Luego, existen matrices C y D tales que $\Phi(t + \omega) = \Phi(t)C$ y $\Psi(t) = \Phi(t)D$. De donde se sigue que

$$\Psi(t + \omega) = \Phi(t + \omega)D = \Phi(t)CD = \Psi(t)D^{-1}CD.$$

Lo cual muestra que $D^{-1}CD$ es una matriz de monodromía para Ψ semejante a la matriz C . Lo cual prueba nuestra afirmación.

Basándose en la observación anterior podemos definir los multiplicadores característicos como sigue.

Definición 3.6 Sea Φ la matriz fundamental principal del sistema (3.1). Llamaremos multiplicadores característicos del sistema (3.1) a los autovalores de la matriz $\Phi(\omega)$ y exponentes característicos del sistema (3.1) a los autovalores de la matriz B que aparece en (3.9).

Teorema 3.7 λ es un multiplicador característico del sistema ω -periódico (3.1) si y sólo si existe una solución no trivial φ de (3.1) tal que $\varphi(t + \omega) = \lambda\varphi(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Demostración. Sea λ un multiplicador característico de (3.1). Llamemos x_0 al autovector correspondiente a λ y sea φ la solución del P.V.I. $x' = A(t)x$, $x(0) = x_0$. Teniendo en cuenta que $\varphi(t) = \Phi(t)x_0$, donde Φ es la matriz fundamental principal de (3.1), se sigue que

$$\varphi(t + \omega) = \Phi(t + \omega)x_0 = \Phi(t)\Phi(\omega)x_0 = \Phi(t)\lambda x_0 = \lambda\varphi(t), t \in \mathbb{R}.$$

Para probar la afirmación recíproca es suficiente poner $t = 0$ en la expresión $\varphi(t + \omega) = \lambda\varphi(t)$, $t \in \mathbb{R}$. ■

Una consecuencia inmediata del Teorema 3.7 es el siguiente

Corolario 3.8 *El sistema (3.1) admite una solución ω -periódica no constante si y sólo si existe al menos un multiplicador característico igual a 1.*

Observación 3.3 Si $\lambda = -1$ es un multiplicador característico del sistema (3.1), entonces del teorema 3.7 se tiene que existe una solución no nula φ tal que $\varphi(t + \omega) = -\varphi(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Lo cual implica que $\varphi(t + 2\omega) = -\varphi(t + \omega) = \varphi(t)$, es decir, φ es 2ω -periódica.

Análogamente, si $\lambda = e^{p\pi i/q}$ es un multiplicador característico, con p y q números naturales, entonces el sistema (3.1) admite una solución $2q\omega$ -periódica. En efecto, sabemos que $\varphi(t+\omega) = e^{p\pi i/q}\varphi(t)$. En general, si reemplazamos ω por $2q\omega$ y procedemos inductivamente, se obtiene que

$$\begin{aligned}\varphi(t + 2q\omega) &= \varphi(t + (2q - 1)\omega + \omega) = \lambda\varphi(t + (2q - 1)\omega) = \dots \\ &= \lambda^{2q}\varphi(t) = e^{2p\pi i}\varphi(t) = (\cos 2p\pi + i \sin 2p\pi)\varphi(t) = \varphi(t).\end{aligned}$$

§ 3.6 Sistemas Lineales ω -Periódicos No Homogéneos

Consideremos el sistema no homogéneo

$$y'(t) = A(t)y(t) + f(t), \quad (3.10)$$

con A y f continuas y ω -periódicas. Como es natural buscaremos información acerca de la periodicidad de las soluciones del sistema (3.10) a partir de los resultados obtenidos para el sistema lineal homogéneo. Así tenemos el siguiente :

Teorema 3.9 *Si la única solución ω -periódica del sistema homogéneo (3.1) es la solución trivial, entonces el sistema (3.10) admite una única solución ω -periódica no constante.*

Demostración. Sea $\psi(t)$ solución de (3.10) tal que satisface la condición inicial $\psi(0) = y_0$. Sabemos en este caso que

$$\psi(t) = \Phi(t)y_0 + \int_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(s)f(s)ds, \quad (3.11)$$

donde $\Phi(t)$ es la matriz fundamental principal del sistema (3.1).

Por otra parte, si $\psi(t)$ es ω -periódica, entonces $\psi(t + \omega) = \psi(t)$. Luego, reemplazando t por $t + \omega$ en (3.11) y haciendo $t = 0$, se obtiene que

$$y_0 = \Phi(\omega)y_0 + \int_0^\omega \Phi(\omega)\Phi^{-1}(s)f(s)ds.$$

De donde se sigue :

$$(I - \Phi(\omega))y_0 = \int_0^\omega \Phi(\omega)\Phi^{-1}(s)f(s)ds.$$

Al ser $\det(I - \Phi(\omega)) \neq 0$, se obtiene que

$$y_0 = (I - \Phi(\omega))^{-1} \int_0^\omega \Phi(\omega)\Phi^{-1}(s)f(s)ds.$$

Al reemplazar y_0 , dado por la expresión anterior, en (3.11) obtenemos que

$$\psi(t) = \Phi(t)(I - \Phi(\omega))^{-1} \int_0^\omega \Phi(\omega)\Phi^{-1}(s)f(s)ds + \int_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(s)f(s)ds \quad (3.12)$$

Luego, $\psi(t)$ dada por (3.12) es una solución ω -periódica, no constante, del sistema (3.10).

Por otra parte, si $\psi_1(t)$ y $\psi_2(t)$ representan soluciones ω -periódicas del sistema (3.10), entonces $\varphi(t) = \psi_1(t) - \psi_2(t)$ es solución ω -periódica del sistema (3.1) y por las condiciones del teorema tiene que ser entonces $\varphi(t) = 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$, es decir, que $\psi_1 = \psi_2$. ■

Definamos la función de Green $G(t, s)$, como la única función que satisface las propiedades siguientes :

1. $\lim_{t \rightarrow s^+} G(t, s) - \lim_{t \rightarrow s^-} G(t, s) = I$,
2. $G(0, s) = G(\omega, s)$,
3. $\frac{\partial G}{\partial t}(t, s) = A(t)G(t, s), \forall t \neq s$,
4. $\lim_{t \rightarrow s^+} \frac{\partial G}{\partial t}(t, s) - \lim_{t \rightarrow s^-} \frac{\partial G}{\partial t}(t, s) = A(s)$.

Si observamos la expresión (3.12) y definimos

$$G(t, s) = \begin{cases} \Phi(t)(I - \Phi(\omega))^{-1}\Phi^{-1}(s) & 0 \leq s \leq t \leq \omega \\ \Phi(t + \omega)(I - \Phi(\omega))^{-1}\Phi^{-1}(s) & 0 \leq t \leq s \leq \omega, \end{cases}$$

obtenemos entonces que $G(t, s)$ es la función de Green asociada al sistema (3.1) y la única solución ω -periódica del sistema no homogéneo (3.10) viene dada por

$$\psi(t) = \int_0^\omega G(t, s)f(s)ds \quad , \quad t \in [0, \omega].$$

En efecto, de (3.12) se obtiene que

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \Phi(t)(I - \Phi(\omega))^{-1} \left[\int_0^\omega \Phi(\omega)\Phi^{-1}(s)f(s)ds + (I - \Phi(\omega)) \int_0^t \Phi^{-1}(s)f(s)ds \right] \\ &= \Phi(t)(I - \Phi(\omega))^{-1} \left[\int_t^\omega \Phi(\omega)\Phi^{-1}(s)f(s)ds + \int_0^t \Phi^{-1}(s)f(s)ds \right]. \end{aligned}$$

Por otra parte, se tiene que

$$\begin{cases} (I - \Phi(\omega))^{-1}\Phi(\omega) = \Phi(\omega)(I - \Phi(\omega))^{-1} \\ \Phi(t)\Phi(\omega) = \Phi(t + \omega). \end{cases}$$

Entonces

$$\psi(t) = \int_0^t G(t,s)f(s)ds + \int_t^\omega G(t,s)f(s)ds = \int_0^\omega G(t,s)f(s)ds.$$

Para terminar esta sección veremos que resolviendo el sistema conjugado asociado a (3.1), podemos obtener información acerca de la periodicidad de las soluciones de (3.10).

Teorema 3.10 *El sistema lineal no homogéneo (3.10) posee soluciones ω -periódicas si y sólo si para cualquier solución $z(t)$ del sistema conjugado (3.6) se satisface que*

$$\int_0^\omega \langle z(s), f(s) \rangle ds = 0.$$

Demostración. Se sabe que $\psi(t)$ es una solución ω -periódica del sistema (3.10) si y solo si $\psi(0) = \psi(\omega)$. Lo cual es equivalente a decir que

$$(I - \Phi(\omega))\psi(0) = \int_0^\omega \Phi(\omega)\Phi^{-1}(s)f(s)ds, \quad (3.13)$$

donde $\Phi(t)$ es la matriz fundamental principal del sistema ω -periódico (3.1). Por otra parte, la expresión (3.13) es una ecuación lineal del tipo $\mathbb{E}z = b$, \mathbb{E} es un operador lineal, la cual posee solución si y sólo si $\langle b, \xi \rangle = 0$ para cualquier ξ solución de la ecuación $\mathbb{E}^T \xi = 0$. Poniendo $\mathbb{E} = I - \Phi(\omega)$ y $\xi = \psi(0)$, obtenemos que (3.13) posee soluciones si y sólo si

$$\langle \psi(0), \int_0^\omega \Phi(\omega)\Phi^{-1}(s)f(s)ds \rangle = \int_0^\omega \psi^T(0)\Phi(\omega)\Phi^{-1}(s)f(s)ds = 0, \quad (3.14)$$

para cualquier $\psi(0)$ tal que $[I - \Phi(\omega)]^T \psi(0) = 0$, o bien lo que es lo mismo

$$\psi^T(0)[I - \Phi(\omega)] = 0.$$

De donde se sigue que $\psi^T(0) = \psi^T(0)\Phi(\omega)$. Reemplazando esta expresión en (3.14), obtenemos

$$\int_0^\omega \psi^T(0)\Phi^{-1}(s)f(s)ds = 0. \quad (3.15)$$

Por otro lado, si $z(t)$ es solución del sistema conjugado (3.6) con condición inicial $\psi(0)$, entonces $z(t) = (\Phi^{-1}(t))^T \psi(0)$. Sustituyendo esto último en (3.15), obtenemos $\int_0^\omega z^T(s)f(s)ds = 0$. ■

Hasta el momento todas las condiciones que tenemos para garantizar la existencia de soluciones periódicas para sistemas lineales involucra el cálculo de los multiplicadores característicos, la cual es una tarea extremadamente complicada. El siguiente resultado nos provee una condición suficiente para la existencia de soluciones periódicas, la cual en la práctica es mas fácil de chequear.

Teorema 3.11 *Supongamos que el sistema (3.10) posee al menos una solución acotada en $[0, +\infty)$. Entonces dicho sistema admite una solución ω -periódica no constante.*

Demostración. Sea $\psi(t)$ una solución de (3.10) acotada sobre $[0, +\infty)$ tal que $\psi(0) = y_0$ y sea $\Phi(t)$ la matriz fundamental principal del sistema homogéneo. Entonces

$$\psi(\omega) = \Phi(\omega)y_0 + \int_0^\omega \Phi(\omega)\Phi^{-1}(s)f(s)ds.$$

Como el sistema (3.10) es ω -periódico, entonces $\psi(t+\omega)$ también satisface a (3.10). Luego, se tiene que

$$\psi(t+\omega) = \Phi(t)\psi(\omega) + \int_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(s)f(s)ds.$$

Poniendo $t = \omega$, obtenemos

$$\psi(2\omega) = \Phi(\omega)\psi(\omega) + \int_0^\omega \Phi(\omega)\Phi^{-1}(s)f(s)ds = \Phi^2(\omega)y_0 + [\Phi(\omega) + I]V,$$

donde

$$V = \int_0^\omega \Phi(\omega)\Phi^{-1}(s)f(s)ds.$$

Procediendo inductivamente se llega a

$$\psi(k\omega) = \Phi^k(\omega)y_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \Phi^i(\omega)V, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Si se supone que el sistema (3.10) no posee soluciones ω -periódicas, entonces

$$[I - \Phi(\omega)]z \neq V, \quad \forall z \in \mathbb{R}^n. \quad (3.16)$$

En efecto, supongamos que $[I - \Phi(\omega)]z = V = \int_0^\omega \Phi(\omega)\Phi^{-1}(s)f(s)ds$, para algún $z \in \mathbb{R}^n$. Entonces la función

$$\varphi(t) = \Phi(t)z + \int_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(s)f(s)$$

es una solución ω -periódica, de (3.10). Contradicción.

De (3.16) se deduce que $\det(I - \Phi(\omega)) = 0$, puesto que de lo contrario la ecuación $(I - \Phi(\omega))z = V$ tendría solución. De allí que existe $c \neq 0$, tal que $(I - \Phi(\omega))^T c = 0$ y $\langle V, c \rangle \neq 0$.

Esto significa que c satisface $c = \Phi^T(\omega)c$. Por tanto $c = (\Phi^T(\omega))^k c$, para todo $k \in \mathbb{N}$ y de allí que

$$\begin{aligned}
 \langle \psi(k\omega), c \rangle &= \langle \Phi^k(\omega)y_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \Phi^i(\omega)V, c \rangle \\
 &= \langle y_0, (\Phi^T(\omega))^k c \rangle + \sum_{i=0}^{k-1} \langle V, (\Phi^T(\omega))^i c \rangle \\
 &= \langle y_0, c \rangle + \sum_{i=0}^{k-1} \langle V, c \rangle = \langle y_0 + kV, c \rangle \rightarrow +\infty,
 \end{aligned}$$

cuando $k \rightarrow +\infty$. Lo que contradice la acotación de ψ sobre $[0, +\infty)$. ■

§ 3.7 Comentarios y Sugerencias

En este capítulo solo hemos considerado sistemas lineales del tipo (3.2) donde $A(t)$ y $f(t)$ son continuas sobre J . Cuando $A(t)$ y $f(t)$ son localmente integrables todos los resultados de los párrafos 3.1 al 3.5 siguen siendo válidos. La única variación consiste en que las soluciones se entenderán como funciones absolutamente continuas que satisfacen (3.2) casi en todas partes sobre J .

En el párrafo 3.6 nos referimos a la reducibilidad de sistemas lineales en el sentido de Liapunov. Sin embargo, es importante en la práctica considerar la reducibilidad en un sentido más amplio. Más concretamente, cuando el sistema (3.1) se reduce a uno cuya matriz es de la forma

$$\begin{bmatrix} C_1(t) & 0 \\ 0 & C_2(t) \end{bmatrix}.$$

Notemos que este concepto de reducibilidad es compatible con el que se introduce en álgebra lineal, ver [13]. Esto tiene importantes conexiones con la teoría de dicotomía, para su estudio recomendamos ver el excelente libro escrito por Coppel [3].

Para finalizar, acotemos que respecto a los sistemas ω -periódicos solo hemos tocado los resultados más elementales. En general, el problema de hallar soluciones periódicas dista de estar totalmente resuelto; muy por el contrario, es profusa la bibliografía referente a este tema. Incluso, el problema de hallar o estimar a los multiplicadores característicos es un problema resuelto solo en casos muy particulares (ver [11], pág. 121).

§ 3.8 Ejercicios y Problemas

1. Halle la matriz fundamental principal de los siguientes sistemas

$$(a) \begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= -x_1. \end{aligned}$$

$$(b) \begin{aligned} x_1' &= 2x_1 + x_2, \\ x_2' &= x_1 + 4x_2. \end{aligned}$$

2. Si $\Phi(t)$ es una matriz solución del sistema homogéneo $X' = A(t)X$ e invertible para algún t_0 , entonces $\Phi(t)$ es no singular para todo $t \in J$.
3. Pruebe que la matriz de transición satisface las propiedades a) – e).
4. Se dice que una solución es positiva, si cada componente de la solución es positiva cuando el dato inicial es positivo. Hallar condiciones para que las soluciones del sistema $x' = A(t)x$ sean positivas en términos de los elementos de la matriz $A = (a_{ij})$. Considere por separado los casos cuando la matriz es constante y cuando es función del tiempo.

5. Muestre que la matriz fundamental de un sistema lineal periódico no necesariamente es periódica. Indicación: considere el siguiente sistema

$$\begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= (\sin t)x + y. \end{aligned}$$

6. Considere la ecuación $y' = a(t)y + b(t)$, donde $a, b \in C[\mathbb{R}, \mathbb{R}]$. Supongamos además que $a(t)$ y $b(t)$ son ω -periódicas . Pruebe que la ecuación dada posee una única solución ω -periódica si y sólo si $\exp(\int_0^\omega a(s)ds) \neq 1$. Estudie el caso cuando $\exp(\int_0^\omega a(s)ds) = 1$.
7. Pruebe que el sistema $x' = A(t)x$ posee k -soluciones ω -periódicas no constantes y linealmente independiente si y sólo si el sistema conjugado $y' = -A^T(t)y$ posee k -soluciones ω -periódicas no constantes y linealmente independiente.

8. Pruebe que la función $G(t, s)$ definida en la sección 3.6 es una función de Green.
9. Pruebe que el sistema (3.1) no admite soluciones ω -periódicas no constantes si y sólo si

$$\text{rango} [I_{n \times n} - K(t_\omega, t_0)] = n$$

donde $K(t, t_0)$ es la matriz de transición del sistema.

10. Pruebe que: Una función $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una solución ω -periódica del sistema $y' = f(t, y)$, con $f(t + \omega, y) = f(t, y)$, si y sólo si $\varphi(0) = \varphi(\omega)$.

11. Considere $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, periódica en su primera variable, con periodo ω . Supongamos que el problema $y' = f(t, y)$ posee una única solución global para cada dato inicial $y_0 = y(t_0)$. Entonces la ecuación $y' = f(t, y)$ tiene una solución periódica de período ω si y sólo si existe una solución acotada en el intervalo $[t_0, \infty)$. Este resultado se debe a José Luis Massera, consulte [16].
12. Considere el sistema ω -periódico $x' = A(t)x$, y sean $\rho_i, i = 1, \dots, n$ sus multiplicadores característicos. Pruebe que

$$\prod_{i=1}^n \rho_i = \exp \left(\int_0^\omega \operatorname{tr} A(t) dt \right).$$

Capítulo 4

Teoría de la Estabilidad

El problema al cual le dedicaremos nuestra atención en este capítulo es el siguiente: Estudiar la dependencia de las soluciones de una ecuación diferencial ordinaria respecto de los datos iniciales sobre intervalos semi-infinitos. En otras palabras, estudiaremos la continuidad de las soluciones respecto a los datos iniciales sobre $[\alpha, \infty)$.

Los iniciadores del estudio que llevaremos a cabo fueron Lagrange y Dirichlet, pero el mayor impulso a la teoría de la estabilidad fue dado por los trabajos de Poincaré y Lyapunov; impulso que llevó a la teoría geométrica de las ecuaciones diferenciales.

§ 4.1 Definiciones de Estabilidad

Consideremos el sistema

$$x' = f(t, x), \quad (4.1)$$

donde $f \in C[J \times D, \mathbb{R}^n]$, $J = (\tau, +\infty)$, $\tau \geq -\infty$, D es un subconjunto abierto y conexo de \mathbb{R}^n .

Definición 4.1 Diremos que la solución $x(t, t_0, x_0)$ del sistema (4.1) es estable en el instante t_0 , si dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$, tal que se verifica que

$$|x(t, t_0, x_0) - x(t, t_0, x_1)| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0 \text{ y } x_1 \in \mathbb{B}_\delta(x_0).$$

Si la solución no es estable en el instante t_0 , se dice que $x(t, t_0, x_0)$ es inestable en t_0 .

Definición 4.2 La solución $x(t, t_0, x_0)$ es asintóticamente estable, si además de ser estable existe $\rho > 0$ tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t, t_0, x_0) - x(t, t_0, x_1)| = 0$, $\forall x_1 \in \mathbb{B}_\rho(x_0)$.

Observación 4.1 El estudio de la estabilidad de una solución $\varphi(t)$ de (4.1) se puede reducir al estudio de la estabilidad de la solución trivial de un sistema equivalente a (4.1). Pongamos $y(t) = x(t) - \varphi(t)$, donde $x(t)$ es una solución arbitraria de (4.1). Entonces $y'(t) = f(t, x(t)) - f(t, \varphi(t)) = f(t, y(t) + \varphi(t)) - f(t, \varphi(t))$. Definiendo ahora $g(t, y) = f(t, y + \varphi(t)) - f(t, \varphi(t))$ y considerando el sistema $y' = g(t, y)$, obtenemos lo deseado. Es por esta razón que de aquí en adelante supondremos que $f(t, 0) = 0$.

En las definiciones 4.1 y 4.2 cuando δ y ρ sean independientes de t_0 , diremos que la solución $x(t, t_0, x_0)$ es uniformemente estable y uniforme asintóticamente estable, respectivamente.

Supongamos que $x(t, t_0, x_0) = 0$, geoméricamente la estabilidad dice que las soluciones de (4.1), para $t \geq t_0$, permanecen en un tubo de radio $\varepsilon > 0$ para datos iniciales suficientemente pequeños (ver figura 4.1).

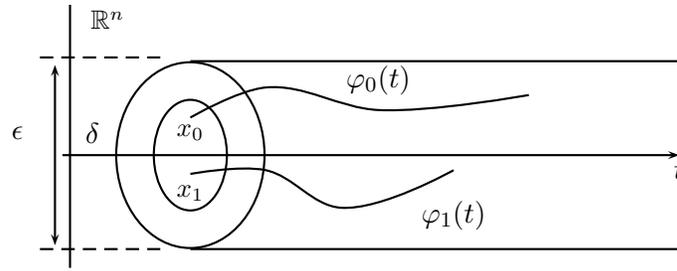


Figura 4.1

La inestabilidad dice que existe $\epsilon_0 > 0$, tal que para cualquier $\delta > 0$ es posible escoger $T > t_0$ y un vector x_1 con $|x_1| < \delta$ para los cuales se satisface que: $|x(T, t_0, x_1)| \geq \epsilon_0$, (ver figura 4.2).

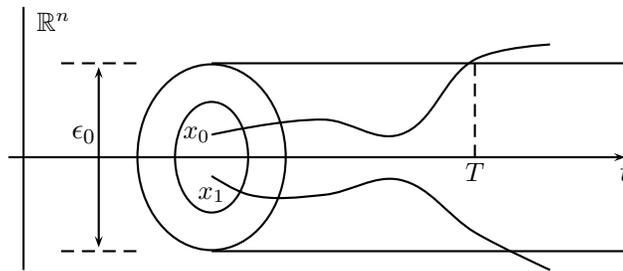


Figura 4.2

Definición 4.3 Diremos que una solución es estable, si ella es estable para todo $t_0 > \tau$.

Proposición 4.1 Sea $t_0 > \tau$. Si la solución trivial de (4.1) es estable (asintóticamente estable) en t_0 , entonces $x = 0$ es estable (asintóticamente estable) en cualquier otro instante $t_1 > \tau$.

Demostración. Supongamos que $x = 0$ es estable en t_0 y que $t_1 \in (\tau, t_0)$. En virtud de la dependencia continua de los datos iniciales, se tiene que para todo $\epsilon_1 > 0$, existe $\delta_1 = \delta_1(\epsilon_1, t_0, t_1) > 0$ tal que

$$|x(t, t_1, x_1)| < \epsilon_1, \quad \forall t \in [t_1, t_0] \text{ y } x_1 \in \mathbb{B}_{\delta_1}(0).$$

Por otra parte, como $x = 0$ es estable en t_0 , se tiene que para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta(\epsilon, t_0) > 0$ tal que: si $|x_0| < \delta$, entonces

$$|x(t, t_0, x_0)| < \epsilon, \quad \forall t \geq t_0.$$

Por lo tanto, si $0 < \epsilon_1 < \delta$, entonces

$$|x(t_0, t_1, x_1)| < \epsilon_1 < \delta < \epsilon.$$

De donde se sigue que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta_1^* = \delta_1^*(\varepsilon, t_0, t_1, \delta) > 0$ tal que

$$|x(t, t_1, x_1)| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_1 \text{ y } x_1 \in \mathbb{B}_{\delta_1^*}(0).$$

Supongamos ahora que $t_1 > t_0$. Definamos

$$V(t_1, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : x = x(t_1, t_0, x_0), \text{ con } x_0 \in \mathbb{B}_\delta(0)\}.$$

La aplicación $x_0 \rightarrow x(t_1, t_0, x_0)$ es un homeomorfismo para cada t_1, t_0 fijos (dependencia continua de los datos iniciales). Por lo tanto, existe $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon, t_0) > 0$ tal que $\overline{\mathbb{B}_{\delta_1}(0)} \subset V(t_1, \varepsilon)$. Con este $\delta_1(t_1, \varepsilon) > 0$, tenemos que

$$|x(t, t_1, x_1)| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_1, \quad |x_1| < \delta_1(t_1, \varepsilon).$$

Lo cual implica la estabilidad de $x = 0$ en $t = t_1$. ■

En virtud de la proposición 4.1, de aquí en adelante sólo diremos que $x = 0$ es estable o asintóticamente estable sin especificar en qué instante.

§ 4.2 Estabilidad para Sistemas Lineales

En esta sección consideraremos sistema lineales no homogéneos del tipo:

$$x'(t) = A(t)x(t) + f(t), \quad t \in J. \tag{4.2}$$

Definición 4.4 Diremos que el sistema (4.2) es estable (asintóticamente estable), si toda solución de (4.2) lo es.

Teorema 4.2 *El sistema (4.2) es estable (asintóticamente estable) si y sólo si la solución trivial del sistema lineal homogéneo*

$$x'(t) = A(t)x(t), \tag{4.3}$$

lo es.

Demostración. Supongamos que el sistema (4.2) es estable, la estabilidad asintótica se prueba de modo análogo.

Sea $x(t, t_0, x_0)$ una solución fija y $x(t)$ cualquier solución de (4.2) y definamos $y(t) = x(t) - x(t, t_0, x_0)$, la cual es solución de (4.3). Como $x(t, t_0, x_0)$ es estable, se tiene que: dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(t_0, \varepsilon)$ tal que: si $|x(t_0) - x_0| < \delta$, entonces $|x(t) - x(t, t_0, x_0)| < \varepsilon$, para todo $t \geq t_0$. Lo cual implica que: $|y(t)| < \varepsilon$ para $t \geq t_0$, si $|y(t_0)| < \delta$.

La afirmación recíproca es obvia. ■

El teorema 4.2 es muy importante por cuanto nos dice que para el estudio de la estabilidad de sistemas lineales no-homogéneos, basta con estudiar la estabilidad de la solución trivial del sistema lineal homogéneo asociado.

Teorema 4.3 *El sistema (4.3) es estable si y sólo si todas sus soluciones son acotadas.*

Demostración. Supongamos que la solución trivial de (4.3) es estable. Entonces

$$|x_i(t, t_0, \delta e_i/2)| \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0 \text{ e } i = 1 \cdots n,$$

donde $e_1 \cdots e_n$ es la base canónica de \mathbb{R}^n y δ es el número dado en la definición de estabilidad. Luego, si $\Phi(t)$ denota a la matriz fundamental del sistema (4.3) cuyas columnas son las soluciones $x_i(t, t_0, \delta e_i/2)$, entonces $\Phi(t)$ está acotada, lo cual a su vez implica la acotación de las soluciones del sistema (4.3).

La recíproca se sigue del hecho que $|\Phi(t)| \leq M$, $\forall t \geq t_0$ y que $x(t, t_0, x_0) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0$. ■

Notemos que el teorema 4.3 no es válido para sistemas no lineales. En efecto, consideremos la ecuación $x'(t) = \sin^2 x$, con $x(0) = x_0$. Sus soluciones vienen dadas por

$$x(t) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg}x_0 - t) & , \text{ si } x_0 \neq k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \\ k\pi & , \text{ si } x_0 = k\pi \end{cases}$$

cuyo gráfico es

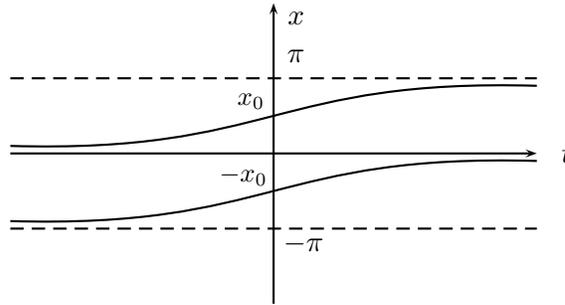


Figura 4.3

Del gráfico se observa que las soluciones están acotadas y sin embargo la solución trivial no es estable.

Teorema 4.4 *La solución trivial de (4.3) es asintóticamente estable si y sólo si $\lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t, t_0, x_0)| = 0$, para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$.*

Demostración. Supongamos que la solución trivial de (4.3) es asintóticamente estable. Entonces, existe $\rho > 0$ tal que para $|x_0| < \rho$ se satisface que $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t, t_0, x_0)| = 0$. Para concluir que $\lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t, t_0, x_0)| = 0$ para datos iniciales con norma $\geq \rho$, es suficiente definir

$$\varphi(t) = \frac{x(t, t_0, x_0) \rho}{|x_0| 2},$$

y observar que $|\varphi(t_0)| = \rho/2$.

Probemos la afirmación recíproca. Para ello es suficiente ver que las soluciones de (4.3) son acotadas. Lo cual se sigue del hecho que $\lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t, t_0, x_0)| = 0$, para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$. ■

Observación 4.2 El conjunto $\Omega = \{x_0 \in \mathbb{R}^n : \lim_{t \rightarrow \infty} |x(t, t_0, x_0)| = 0\}$ se llama región de atracción de la solución trivial de (4.3). El teorema anterior nos dice que para sistemas lineales homogéneos Ω es todo \mathbb{R}^n , si el sistema es asintóticamente estable. En este caso se dice que la solución trivial es asintóticamente estable en grande.

Ejemplo 4.1 El teorema 4.4 no es válido para sistemas no lineales, tal como veremos a continuación. Este ejemplo nos fue comunicado por el Lic. Rodolfo Rodríguez.

Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x' = -\frac{x}{t} + [2t - y^2 t^3(t-1) - 1]y^2 t \exp(y^2 t^2(1-t)) \\ y' = -\frac{y}{t} \end{cases} \quad (4.4)$$

con $x(1) = x_0, y(1) = y_0$.

Se puede verificar que

$$z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_0}{t} + (t-1)y_0^2 \exp y_0^2(1-t) \\ \frac{y_0}{t} \end{pmatrix}$$

es la solución de (4.4) y además $\lim_{t \rightarrow \infty} |z(t)| = 0$. Sin embargo para $0 < \delta < 1/e$, N suficientemente grande y $z_0 = z(t_0) = \left(\frac{1}{N}, \frac{1}{\sqrt{N}}\right)^T$, se verifica que $|z_0| < \delta$ y eligiendo $t^* = 1 + N$, se tiene

$$|z(t^*, 1, z_0)| \geq |x(t^*)| = \frac{1}{N(N+1)} + \frac{1}{e} > \frac{1}{e}.$$

Por lo tanto la solución trivial de (4.4) es inestable.

§ 4.3 Sistemas Lineales a Coeficientes Constantes

Consideremos el siguiente sistema lineal a coeficientes constantes

$$x'(t) = Ax(t). \quad (4.5)$$

Teorema 4.5 *El sistema (4.5) es uniforme asintóticamente estable si y solo si todos los autovalores de la matriz A tienen parte real negativa.*

Demostración. Las soluciones de (4.5) son de la forma :

$$\varphi_i(t) = (p_1(t) \exp(\lambda_i t), \dots, p_n(t) \exp(\lambda_i t)), \quad (4.6)$$

con $p_i(t)$ polinomio de grado $(r - 1)$, $\lambda_i \in \sigma(A)$ es de multiplicidad r . Luego, como $\Phi(t) = \exp(At)$ es la matriz fundamental principal y está formada por vectores columnas del tipo (4.6), se tiene que existen constantes positivas M y α tales que

$$|\Phi(t)| \leq M \exp(-\alpha t), \quad t \geq 0. \quad (4.7)$$

Luego, dado $\varepsilon > 0$, tomando $\delta = \varepsilon/M$, se tiene que si : $|x_0| < \delta$, entonces $|x(t, x_0)| \leq |\Phi(t)| \cdot |x_0| < \varepsilon$, para todo $t \geq 0$.

Además de (4.7) se deduce que $|x(t, x_0)| \rightarrow 0$, cuando $t \rightarrow +\infty$. ■

Observación 4.3 Si al menos un autovalor $\lambda \in \sigma(A)$ posee parte real menor o igual a cero, la estabilidad a secas dependerá de la dimensión de los bloques elementales de Jordan generado por λ . Si para algún $\lambda \in \sigma(A)$, $Re\lambda > 0$, entonces se puede asegurar la inestabilidad del sistema (4.5).

§ 4.4 Criterio de Estabilidad de Routh-Hurwitz

Diremos que

$$P_n(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n, \quad (4.8)$$

con $a_i \in \mathbb{R}$, es un polinomio de Hurwitz si todas sus raíces tienen parte real negativa.

Lema 4.6 *Si $P_n(z)$ es un polinomio de Hurwitz, entonces $a_i > 0, \forall i = 1, \dots, n$.*

Demostración. Sean z_1, \dots, z_p las raíces reales de $P_n(z)$ y $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sus correspondientes multiplicidades. Denotemos con z_{p+1}, \dots, z_{p+q} las raíces complejas de $P_n(z)$ y β_1, \dots, β_q sus respectivas multiplicidades. Por hipótesis

$$\operatorname{Re} z_k < 0, \quad k = 1, 2, \dots, p + q.$$

Sabemos que

$$P_n(z) = \prod_{k=1}^p (z - z_k)^{\alpha_k} \prod_{k=1}^q (z - z_{p+k})^{\beta_k} (z - \bar{z}_{p+k})^{\beta_k}.$$

Pongamos $z_k = -b_k$, con $b_k > 0$, $k = 1, \dots, p$ y $z_{j+p} = -b_{j+p} + ic_j$, con $b_{j+p} > 0$, $j = 1, \dots, q$. Así

$$P_n(z) = \prod_{k=1}^p (z + b_k)^{\alpha_k} \prod_{j=1}^q (z^2 + 2b_{j+p}z + b_{j+p}^2 + c_j^2)^{\beta_j};$$

lo cual implica que todos los coeficientes de $P_n(z)$ son mayores que cero. ■

Corolario 4.7 *En el caso $n \leq 2$ la condición anterior es suficiente; es decir, todo polinomio de segundo grado es de Hurwitz si y sólo si $a_i > 0, i = 1, 2$.*

Denotemos por H_n al conjunto de todos los polinomios de Hurwitz de grado n .

Definición 4.5 Diremos que $F(z)$ es un polinomio asociado a $P_n(z)$ si existe $\alpha > 0$ tal que $F(z) = (1 + \alpha z)P_n(z) + P_n(-z)$.

Lema 4.8 *Sea $P_n(z) \in H_n$. Entonces su asociado $F(z) \in H_{n+1}$.*

Demostración. Definamos una familia de polinomios $P_\mu(z)$ como sigue

$$P_\mu(z) = (1 + \alpha z)P_n(z) + \mu P_n(-z); \mu \in [0, 1].$$

Demostremos que $P_\mu(z) \in H_{n+1}$, para todo $\mu \in [0, 1]$.

Observemos que: si $\mu = 0$, entonces $P_0(z) = (1 + \alpha z)P_n(z) \in H_{n+1}$. En efecto, como $\alpha > 0$, entonces todas las raíces de $P_0(z)$ tiene parte real menor que cero.

Por otra parte, como las raíces de cualquier polinomio dependen continuamente de sus coeficientes, tenemos que los ceros de $P_\mu(z)$ como funciones de μ , son continuas; es decir, $z_j : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, $j = 1, \dots, n + 1$ son funciones continuas.

Supongamos que existe un $\tilde{\mu} \in (0, 1]$ y un índice $1 \leq j \leq n$ tal que $\operatorname{Re} z_j(\tilde{\mu}) = 0$. Denotando con $z_j(\tilde{\mu}) = i\beta$ ($\beta \neq 0$), tenemos que $P_{\tilde{\mu}}(z_j) = 0$ y $P_{\tilde{\mu}}(\bar{z}_j) = 0$. Así

$$(1 + i\beta\alpha)P_n(i\beta) = -\tilde{\mu}P_n(-i\beta) \quad , \quad (1 - i\beta\alpha)P_n(-i\beta) = -\tilde{\mu}P_n(i\beta).$$

Esto implica que

$$P_n(i\beta)(1 + \alpha^2\beta^2 - \tilde{\mu}^2) = 0.$$

Como $\tilde{\mu}^2 \leq 1$, entonces $1 + \alpha^2\beta^2 - \tilde{\mu}^2 > 0$, por tanto $P_n(i\beta) = 0$; es decir, $i\beta$ es raíz de P . Contradicción. Luego, no existe $\tilde{\mu} \in (0, 1]$ tal que $\operatorname{Re}[z_j(\tilde{\mu})] = 0$ y así necesariamente $\operatorname{Re}[z_j(\mu)] < 0, \forall \mu \in (0, 1]$ y $j = 1, \dots, n+1$. Tomando $\mu = 1$ se obtiene lo deseado. ■

Lema 4.9 Si $F(z) \in H_{n+1}$, entonces existe $\alpha > 0$ y $P_n \in H_n$ tal que F es el asociado de P_n .

Demostración. Sea

$$F(z) = z^{n+1} + A_1z^n + \dots + A_nz + A_{n+1}.$$

Mostremos que existe un $\alpha > 0$ y un polinomio

$$P_n(z) = z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_{n-1}z + a_n,$$

tal que

$$F(z) = (1 + \alpha z)P_n(z) + P_n(-z). \quad (4.9)$$

Si se verifica (4.9), entonces se tiene que

$$F(-z) = (1 - \alpha z)P_n(-z) + P_n(z). \quad (4.10)$$

Excluyendo $P_n(-z)$ de (4.9) y (4.10), obtenemos

$$\alpha^2 z^2 P_n(z) = (\alpha z - 1)F(z) + F(-z). \quad (4.11)$$

Sustituyendo $F(z)$ en (4.11), se tiene que

$$\begin{aligned} \alpha^2 z^2 P_n(z) = \alpha z^{n+2} &+ (\alpha A_1 - 1 + (-1)^{n+1})z^{n+1} + (\alpha A_2 - A_1 + (-1)^n A_1)z^n \\ &+ \dots + \alpha A_n z^2 + (\alpha A_{n+1} - 2A_n)z. \end{aligned}$$

Lo cual implica que eligiendo $\alpha = 2A_n/A_{n+1}$, los coeficientes del polinomio $P_n(z)$ se determinan unívocamente.

Definamos

$$v_\mu(z) = (\alpha z - 1)F(z) + \mu F(-z), \quad \mu \in [0, 1];$$

y veamos que

- a) $v_\mu(z)$ tiene una raíz real positiva y $(n + 1)$ raíces con parte real negativa, $\forall \mu \in [0, 1)$;
- b) $\lim_{\mu \rightarrow 1} v_\mu(z)$ posee n raíces con parte real negativa y dos con parte real nula.

Probemos a). Si $\mu = 0$, entonces $v_0(z) = (\alpha z - 1)F(z)$. Así, $v_0(z) = 0$ si y sólo si $z = 1/\alpha$ ó $F(z) = 0$. Por lo tanto, v_0 cumple con a).

Probemos que esta disposición de las raíces de $v_0(z)$ se mantiene con respecto a los polinomios $v_\mu(z)$, $\forall \mu \in [0, 1)$. En efecto, supongamos que existen $\tilde{\mu} \in (0, 1)$ y un $1 \leq j \leq n + 2$ tales que $z_j(\tilde{\mu}) = i\beta$ es raíz del polinomio $v_{\tilde{\mu}}(z)$. Entonces

$$v_{\tilde{\mu}}(i\beta) = v_{\tilde{\mu}}(-i\beta) = 0.$$

Así

$$(\alpha\beta i - 1)F(i\beta) + \tilde{\mu}F(-i\beta) = 0,$$

y

$$-(\alpha\beta i + 1)F(-i\beta) + \tilde{\mu}F(i\beta) = 0.$$

De donde se sigue que

$$-(1 + \alpha\beta i)(1 - \alpha\beta i)F(i\beta) + \tilde{\mu}^2 F(i\beta) = 0,$$

o bien

$$F(i\beta)[\tilde{\mu}^2 - 1 - \alpha^2\beta^2] = 0.$$

Esto implica que $F(i\beta) = 0$ ya que $\tilde{\mu}^2 < 1$. Contradicción, pues $F \in H_{n+1}$. Con esto queda probado a).

Sustituyendo $F(z)$ y $\alpha = 2A_n/A_{n+1}$ en $v_\mu(z)$, obtenemos

$$v_\mu(z) = \frac{2A_n}{A_{n+1}}z^{n+2} + \dots + \left(\frac{2A_n}{A_{n+1}} - A_{n-1} + \mu A_{n-1} \right) z^2 + (A_n - \mu A_n)z + A_{n+1}(\mu - 1).$$

Notemos que

$$v_1(z) = (\alpha z - 1)F(z) + F(-z),$$

por lo cual $v_1(z)$, de acuerdo a (4.11), lo podemos escribir como

$$v_1(z) = \alpha^2 z^2 P_n(z); \quad \text{con} \quad \alpha = \frac{2A_n}{A_{n+1}}.$$

Luego, $v_1(z)$ posee dos raíces nulas ya que el término libre de $P_n(z)$ es distinto de cero.

Ahora, teniendo en cuenta la disposición de las raíces de v_μ para $v \in [0, 1)$ y la relación existente entre las raíces y los coeficientes de un polinomio, obtenemos que

$$\sum_{j=1}^{n+2} \frac{1}{z_j(\mu)} = -\frac{A_n(1 - \mu)}{A_{n+1}(\mu - 1)} = \frac{A_n}{A_{n+1}}, \quad \forall \mu \in [0, 1).$$

De donde sigue

$$\sum_{j=1}^{n+2} \operatorname{Re} \frac{1}{z_j(\mu)} = \frac{A_n}{A_{n+1}}, \quad \forall \mu \in [0, 1).$$

Esta última igualdad muestra que las raíces que tienden a cero cuando $\mu \rightarrow 1^-$, son la positiva y una con parte real negativa; ya que si fuesen dos raíces con parte real negativa las que tienden a cero, tendríamos que

$$\lim_{\mu \rightarrow 1^-} \sum_{j=1}^{n+2} \operatorname{Re} \frac{1}{z_j(\mu)} = -\infty,$$

lo cual no puede ser. ■

Consideremos el polinomio $P_n(z)$ y supongamos que los $a_i > 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$. Formemos la matriz

$$H_n = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \cdot & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_n \end{pmatrix}.$$

y sean

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \Delta_n = a_n \Delta_{n-1}.$$

Teorema 4.10 (Criterio de Routh-Hurwitz) *Las raíces de $P_n(z)$ poseen parte real negativa si y sólo si $\Delta_i > 0, i = 1, \dots, n$.*

Demostración. (Necesidad) Asumamos que $P_n \in H_n$. Realicemos la prueba por inducción. Sea $P_1(z) = z + a_1$. Así $z = -a_1 < 0$ y $\Delta_1 = a_1 > 0$. Consideremos $P_2(z) = z^2 + a_1z + a_2$. Luego por el corolario 4.7, Δ_1 y Δ_2 son positivas.

Supongamos que para todo $P_n \in H_n$, se verifica que $\Delta_j > 0, j = 1, \dots, n$. Sea $F \in H_{n+1}$. De acuerdo con el lema 4.9, existe $\alpha > 0$ y $P_n \in H_n$ tal que

$$F(z) = (1 + \alpha z)P_n(z) + P_n(-z).$$

Por comodidad pongamos $\alpha = 2c$, donde $c > 0$. Entonces

$$\begin{aligned} F(z) &= 2cz^{n+1} + (1 + (-1)^n + 2ca_1)z^n + (a_1 + (-1)^{n-1}a_1 + 2ca_2)z^{n-1} \\ &\quad + \dots + (a_{n-2} + (-1)^2a_{n-2} + 2ca_{n-1})z^2 + (a_{n-1} + (-1)a_{n-1} + 2ca_n)z + 2a_n. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Supongamos por ejemplo que n es par, el caso n -impar se analiza en forma similar. De (4.12) obtenemos que :

$$F(z) = 2cz^{n+1} + (2 + 2ca_1)z^n + 2ca_2z^{n-1} + \dots + (2a_{n-2} + 2ca_{n-1})z^2 + 2ca_nz + 2a_n;$$

de donde sigue :

$$H_F = \begin{pmatrix} 2 + 2ca_1 & 2c & 0 & \cdot & 0 \\ 2a_2 + 2ca_3 & 2ca_2 & 2 + 2ca_1 & \cdot & \cdot \\ 2a_4 + 2ca_5 & 2ca_4 & 2a_2 + 2ca_3 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 2a_n \end{pmatrix}.$$

Multiplicando la segunda columna por $-1/c$ y sumándola a la primera; la cuarta la multiplicamos por $-1/c$ y la sumamos a la tercera; y así sucesivamente hasta arribar a la n -ésima columna, obtenemos

$$H_F = \begin{pmatrix} 2ca_1 & 2c & 0 & \cdot & 0 \\ 2ca_3 & 2ca_2 & 2ca_1 & \cdot & \cdot \\ 2ca_5 & 2ca_4 & 2ca_3 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 2a_n \end{pmatrix}.$$

De donde se sigue que:

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_1 &= 2ca_1 = 2c\Delta_1, \\ \tilde{\Delta}_2 &= (2c)^2 \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = (2c)^2 \Delta_2, \\ &\vdots \\ \tilde{\Delta}_n &= (2c)^n \Delta_n, \\ \tilde{\Delta}_{n+1} &= 2a_n \tilde{\Delta}_n. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $\Delta_j > 0, \forall j = 1, \dots, n$, se sigue que $\tilde{\Delta}_j > 0, \forall j = 1, \dots, n + 1$.

(Suficiencia) Sea $P_n(z)$ un polinomio dado, con $a_j > 0, \forall j = 1, \dots, n$ y $\Delta_j > 0, \forall j = 1, \dots, n$. La prueba la realizaremos por inducción.

Sea $P_1(z) = z + a_1$. Como $\Delta_1 = a_1 > 0$, entonces $z_1 = -a_1 < 0$.

Para $n = 2$ nuestra afirmación sigue del corolario 4.7.

Sea $F(z)$ un polinomio de grado $(n + 1)$ con coeficientes positivos tal que $\tilde{\Delta}_j > 0, \forall j = 1, \dots, n + 1$.

Por hipótesis todo polinomio de grado n con coeficientes positivos que verifique la condición de Hurwitz, es un polinomio de Hurwitz.

Realizando un cálculo análogo al que hicimos en la prueba de la necesidad, obtenemos que $\tilde{\Delta}_j = (2c)^j \Delta_j, \forall j = 1, \dots, n$.

Sabemos que dado $F(z)$, el polinomio $P_n(z)$ se elige de la siguiente igualdad

$$\alpha^2 z^2 P_n(z) = (\alpha z - 1)F(z) + F(-z).$$

Puesto que $\tilde{\Delta}_j > 0, \forall j = 1, \dots, n+1$, tendremos que $\Delta_j > 0 (j = 1, \dots, n)$. Así, por la hipótesis inductiva $P_n(z)$ es un polinomio de Hurwitz y por el lema 4.8 concluimos que $F \in H_{n+1}$. ■

§ 4.5 Sistemas Lineales Semi-Autónomos

En esta sección estudiaremos bajo que condiciones se puede establecer la estabilidad de sistemas del tipo

$$x' = (A + C(t))x(t), \quad (4.13)$$

con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $C \in C((t_0, \infty), \mathbb{R}^{n \times n})$.

Teorema 4.11 *Si la matriz A tiene todos sus autovalores con parte real negativa y*

$$\int_0^\infty |C(t)| dt < \infty, \quad (4.14)$$

entonces la solución trivial de (4.13) es asintóticamente estable.

Demostración. De (4.13) se obtiene que

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}C(s)x(s)ds.$$

Como todos los autovalores de la matriz A tienen parte real negativa, existen constantes positivas $K > 0$ y $\alpha > 0$ tales que

$$|e^{At}| \leq K \exp(-\alpha t) \quad , \quad \forall t \geq 0.$$

Combinando estas dos últimas relaciones se tiene

$$|x(t)| \exp(\alpha t) \leq K|x_0| + \int_0^t K|C(s)||x(s)| \exp(\alpha s) ds.$$

Usando el lema de Gronwall y (4.14) se obtiene que

$$|x(t)| \exp(\alpha t) \leq K|x_0| \exp\left(\int_0^t K|C(s)| ds\right) = M < \infty.$$

Lo cual prueba nuestra afirmación ■

De la demostración del teorema anterior se obtiene fácilmente el siguiente:

Corolario 4.12 1. *Si $|C(t)| \leq \delta, \forall t \geq 0$, con $\delta > 0$ suficientemente pequeño y los autovalores de la matriz A tienen parte real negativa, entonces la solución trivial del sistema (4.13) es asintóticamente estable.*

2. *Si las soluciones de $x' = Ax$ están acotadas sobre $[0, \infty)$ y se satisface (4.14), entonces las soluciones de (4.13) también están acotadas sobre $[0, \infty)$.*

§ 4.6 Sistemas no Lineales

Consideremos el sistema no lineal

$$x' = A(t)x + f(t, x) \quad , \quad f(t, 0) = 0. \quad (4.15)$$

Definición 4.6 La solución trivial de (4.15) es exponencialmente estable, si existen constantes $K \geq 1$ y $\alpha > 0$ tales que toda solución $x(t)$, con $x(t_0) = x_0$, satisface que

$$|x(t)| \leq K|x_0|e^{-\alpha(t-t_0)} \quad , \quad t \geq t_0.$$

Proposición 4.13 Sea $\Phi(t)$ la matriz fundamental del sistema (4.3) y $K(t, s) = \Phi(t)\Phi^{-1}(s)$ la matriz de transición. Entonces todas las soluciones de (4.3) son uniformemente estable si y sólo si existe una constante $M > 0$, tal que

$$|K(t, s)| \leq M \quad , \quad \forall t, s : 0 \leq s \leq t < \infty. \quad (4.16)$$

La demostración es una consecuencia inmediata del hecho que $x(t, t_0, x_0) = K(t, t_0)x_0$.

Teorema 4.14 La solución trivial de (4.3) es exponencialmente estable si y sólo si es uniforme asintóticamente estable.

Demostración. Claramente exponencialmente estable implica uniforme asintóticamente estable.

Demostremos el recíproco. Sabemos que existe $\delta > 0$, tal que $|x(t_0)| < \delta$ implica que $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| = 0$. Luego, dado $\varepsilon > 0$, existe $T > 0$ tal que: si $t \geq t_0 + T$, entonces $|x(t)| < \varepsilon$. Tomemos $\varepsilon > 0$ de modo que $\varepsilon = \delta/2$ y sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n\delta > 1$.

Definamos ahora

$$\psi(t) = \frac{x(t)}{|x_0|} \left(\delta - \frac{1}{n} \right) \quad , \quad t \geq t_0 + T \quad , \quad x(t_0) = x_0.$$

Entonces $|\psi(t_0)| = \delta - \frac{1}{n} < \delta$ y por tanto $|\psi(t)| < \frac{\delta}{2}$, si $t \geq t_0 + T$.

Entonces

$$|x(t)| < |x_0| \frac{\delta}{2} \left(\delta - \frac{1}{n} \right)^{-1} \quad , \quad \text{si } t \geq t_0 + T.$$

Como la estabilidad es uniforme, T no depende de $n \in \mathbb{N}$. Luego, haciendo que $n \rightarrow \infty$, se obtiene que :

$$|x(t)| < \frac{1}{2}|x_0| \quad , \quad \text{si } t \geq t_0 + T.$$

Mostremos que $|x(t)| \leq |x_0|/2^r$, si $t \geq t_0 + rT$, y $r \in \mathbb{N}$. En efecto, por la unicidad de las soluciones se tiene que:

$$x(t) = x(t, t_0, x_0) = x(t, t_0 + T, x(t_0 + T)) \quad , \quad \text{si } t \geq t_0 + T. \quad (4.17)$$

Entonces

$$|x(t)| < \frac{1}{2}|x(t_0 + T)| \leq \frac{1}{2^2}|x_0| \quad , \quad \text{si } t \geq t_0 + 2T.$$

El resto sigue por inducción.

Teniendo en cuenta que $2^{-r} = \exp(-r \ln 2)$, obtenemos $|x(t)| \leq \exp(-r \ln 2)|x_0|$, si $t \geq t_0 + rT$, $r \in \mathbb{N}$.

Sea $t \geq t_0$ arbitrario. Entonces existe un $r \in \mathbb{N}$ tal que $t_0 + rT \leq t < t_0 + (r + 1)T$. De donde se sigue que $(t - t_0 - T)/T \leq r$ lo cual a su vez implica que $\exp(-r \ln 2) \leq \exp[-\ln 2(t - t_0 - T)/T]$, y por tanto

$$|x(t)| \leq |x_0| \exp(\ln 2) \exp\left(-\ln 2 \frac{t - t_0}{T}\right) \quad , \quad \text{si } t \geq t_0 + T. \quad (4.18)$$

Supongamos ahora que $t \in [t_0, t_0 + T]$. Como la solución trivial de (4.3) es uniformemente estable, existe una constante $M > 0$ tal que

$$|x(t)| \leq M|x_0| \quad , \quad \text{si } t \geq t_0.$$

Como $t \in [t_0, t_0 + T]$, entonces $(t - t_0)/T \leq 1$; y por tanto

$$\exp\left(-\ln 2 \frac{t - t_0}{T}\right) \geq \exp(-\ln 2) = \frac{1}{2}.$$

Luego, si $t \in [t_0, t_0 + T]$, se tiene que $1 \leq 2 \exp\left(-\ln 2 \frac{t - t_0}{T}\right)$ y por ende

$$|x(t)| \leq M|x_0| \leq 2M|x_0| \exp\left(-\ln 2 \frac{t - t_0}{T}\right). \quad (4.19)$$

Combinando (4.18) y (4.19), obtenemos que existen constantes $K \geq 1$ y $\alpha > 0$, tales que $|x(t)| \leq K|x_0| \exp(-\alpha(t - t_0))$, $\forall t \geq t_0$. Donde $\alpha = \ln 2/T$, $K = \max\{2, 2M\}$. ■

Teorema 4.15 (a) *Si las soluciones de (4.3) son uniformemente estable y existe una función continua e integrable $m : [t_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que*

$$|f(t, x)| \leq m(t)|x|, \quad \forall (t, x) \in J \times D, \quad (4.20)$$

entonces la solución trivial de (4.15) es uniformemente estable.

(b) *Si las soluciones de (4.3) son uniforme asintóticamente estable, entonces bajo la condición (4.20) siendo m una función continua y $\int_t^{t+1} m(s)ds \leq C, \forall t \geq t_0$, la solución trivial de (4.15) es uniforme asintóticamente estable.*

Demostración. Probemos (a). Sea $x(t)$ la única solución de (4.15) tal que $x(t_0) = x_0$. Supongamos que $[t_0, \beta)$ es el intervalo maximal de existencia de $x(t)$. Haciendo variación de parámetros, de (4.15) obtenemos que:

$$x(t) = K(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t K(t, s)f(s, x(s))ds, \quad t \in [t_0, \beta); \quad (4.21)$$

Teniendo en cuenta que la solución trivial de (4.3) es uniforme estable, existe una constante $M > 0$ tal que :

$$|K(t, t_0)| \leq M. \quad (4.22)$$

Luego, de (4.21) y (4.22) se sigue:

$$|x(t)| \leq M|x_0| + \int_{t_0}^t M|f(s, x(s))|ds, \quad t \in [t_0, \beta). \quad (4.23)$$

Combinando (4.20) y (4.23), obtenemos

$$|x(t)| \leq M|x_0| + M \int_{t_0}^t m(s)|x(s)|ds, \quad t \in [t_0, \beta). \quad (4.24)$$

Aplicando la desigualdad de Gronwall a (4.24), se tiene que:

$$|x(t)| \leq M|x_0|e^{M \int_{t_0}^t m(s)ds} \leq M|x_0|e^{M \int_{t_0}^{\infty} m(s)ds}, \quad \forall t \in [t_0, \beta).$$

Esto prueba que las soluciones del sistema (4.15) son prolongables a infinito y uniformemente estable.

La prueba de (b) es análoga a la de (a), sólo se debe tener en cuenta que: si $m : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ es una función continua y $\int_t^{t+1} m(s)ds \leq C, \forall t \geq t_0$, entonces

$$\int_{t_0}^t \exp(-\alpha(t-s))m(s)ds \leq \frac{C}{1 - \exp(-\alpha)}, \quad \forall t \geq 0, \alpha > 0.$$

En efecto, del teorema del valor medio para integrales se sigue que:

$$\begin{aligned} \int_{t-k-1}^{t-k} e^{-\alpha(t-s)}m(s)ds &= e^{-\alpha k} \int_{\xi}^{t-k} m(s)ds \\ &\leq e^{-\alpha k} \int_{t-k-1}^{t-k} m(s)ds \leq e^{-\alpha k} C \end{aligned}$$

donde $\xi \in [t-k-1, t-k]$. Lo cual implica que:

$$\int_{t_0}^t e^{-\alpha(t-s)}m(s)ds \leq \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\alpha k} C = \frac{C}{1 - e^{-\alpha}}. \blacksquare$$

§ 4.7 Comentarios y Sugerencias

En este capítulo nos hemos restringido a caracterizar los conceptos mas usuales de la teoría de la estabilidad. Es muy grande la cantidad de definiciones que se han dado con el fin de obtener los mejores resultados posibles en esta dirección. Una discusión detallada, acompañada de una extensa bibliografía se encuentra en [20], [26].

Un problema muy interesante, que tampoco hemos tocado, es el concerniente a la caracterización de las perturbaciones que preservan las propiedades del sistema sin perturbar. Más concretamente, sean

$$x' = A(t)x, \tag{4.25}$$

$$y' = A(t)x + f(t). \tag{4.26}$$

Si las soluciones de (4.25) están acotadas o uniformemente acotadas en el infinito, etc. ¿A qué clase deben pertenecer A y f , para que (4.26) tenga la misma propiedad ?. A este respecto se puede consultar, por ejemplo el libro de Coppel [3].

§ 4.8 Ejercicios y Problemas

1. Muestre que la solución trivial de la ecuación $x' = 0$ es estable, pero no es asintóticamente estable.
2. Muestre que la solución trivial de las ecuaciones $x' = x^2$ y $x' = -x^2$ no es estable.
3. Estudie la estabilidad de la solución trivial de la ecuación $x'' + x = 0$.
4. Considere la ecuación $y'(t) + y(t) = f(t, y(t))$, donde $f : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ viene definida como $f(0, 0) = 0$, $f(t, y) = ty/(t^2 + y^2)$. Estudie la estabilidad asintótica de la solución trivial $y = 0$.
5. Considere la ecuación $y' = A(t)y$, donde la matriz $A(t)$ viene dada por

$$A = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & \sin(\ln t) + \cos(\ln t) - 2a \end{pmatrix}.$$

Pruebe que la solución trivial $y \equiv 0$ es asintóticamente estable, si $a > \frac{1}{2}$.

6. La estabilidad para sistemas lineales a coeficientes variables $y' = A(t)y$, no se puede caracterizar en términos de los autovalores de la matriz $A(t)$.
Ayuda: ver Hale [11], p.121, ó Coppel [3], p.3.
7. Describa en el plano de los parámetros (a, b) el diagrama de estabilidad y estabilidad asintótica de las soluciones de la siguiente ecuación diferencial

$$y''' + ay'' + by' + 6y + 4 - a = 0 \quad .$$

Ayuda: Use el criterio de Routh-Hurwitz.

8. Estudie la estabilidad asintótica de la solución trivial del sistema

$$y'' + ay' + b \sin y = 0, \quad a \geq 0, \quad b > 0.$$

9. Haga los ejercicios 3,4,5,6,7,15,16,29 y 41 del Capítulo 3 del libro de Coddington y Levinson [4].

Capítulo 5

Segundo Método de Liapunov

En todos los resultados que hemos obtenido sobre estabilidad hemos supuesto que tenemos una expresión explícita para las soluciones de la ecuación diferencial en estudio en función de la matriz fundamental y que se conoce el comportamiento en norma de ésta. En general esto no tiene porqué ser así. Por tal razón en lo que sigue nos ocuparemos de estudiar la estabilidad de sistemas del tipo $y' = f(t, y)$ donde no se supone a priori que se tengan expresiones explícitas para las soluciones del sistema en cuestión.

El método que emplearemos para tal estudio posee la desventaja, que precisa de la construcción de ciertas funciones para las cuales no existen métodos analíticos para su construcción y todo depende de la habilidad del usuario, aunque en muchos casos el problema en consideración sugiere la forma del funcional que desea.

§ 5.1 Preliminares

Sea $V \in C[J \times D, \mathbb{R}]$ y $W \in C[D, \mathbb{R}]$. Consideremos $D \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y conexo, tal que $0 \in D$. Denotemos por $\mathbb{R}_0^+ = \{z \in \mathbb{R} : z \geq 0\}$.

Definición 5.1 (a) Se dice que W es una función no negativa (no positiva), si $W(x) \geq 0$ ($W(x) \leq 0$), para todo $x \in D$.

(b) Diremos que W es definida positiva (definida negativa), si $W(x) > 0$ ($W(x) < 0$) para todo $x \neq 0$ y $W(0) = 0$.

(c) Diremos que V es positiva (negativa), si $V(t, x) \geq 0$ ($V(t, x) \leq 0$) para todo $(t, x) \in J \times D$.

(d) Se dice que V es definida positiva (definida negativa), si existe una función W definida positiva tal que $V(t, x) \geq W(x)$ ($V(t, x) \leq -W(x)$) para todo $(t, x) \in J \times D$ y $V(t, 0) = W(0) = 0$.

Notemos que la definición (d), geoméricamente significa que las superficies de nivel $V(t, x) = C$, para cada $t \in J$, están contenidas en las superficies de nivel $W(x) = C$, (ver figura 5.1).

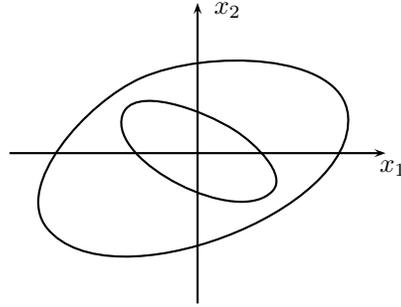


Figura 5.1

En el estudio de la estabilidad es muy importante que las superficies de nivel de la función $W(x)$ sean cerradas geoméricamente. Más precisamente, diremos que la superficie de nivel es cerrada geoméricamente respecto del punto $x = 0$, si para toda curva continua que una a $x = 0$ con un punto de la frontera de D , existe un x_0 en la curva tal que $W(x_0) = C$. El lema siguiente nos da una caracterización de este concepto.

Lema 5.1 *Si $W \in C[D, \mathbb{R}_0^+]$ es una función definida positiva, entonces existe una constante $h > 0$ tal que todas las superficies de nivel $W(x) = C$ son cerradas geoméricamente respecto de $x = 0$, para todo $C \in (0, h)$.*

Demostración. Sea $\mathbb{B}_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$. Elijamos un $R > 0$ de modo que $\overline{\mathbb{B}_R} \subset D$. Pongamos $\alpha = \min\{W(x) : x \in \partial\mathbb{B}_R\}$. Por la continuidad y el hecho que W es definida positiva se sigue que $\alpha > 0$. Si $\alpha = 0$, entonces existe un $\tilde{x} \in \partial\mathbb{B}_R$ tal que $W(\tilde{x}) = 0, \tilde{x} \neq 0$. Contradicción.

Sea $\varphi : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva continua tal que $\varphi(t_0) = 0$ y $\varphi(t_1) = P \in \partial\mathbb{B}_R$. De ésto sigue que $W(P) \geq \alpha$. Sea $0 < C < \alpha$. Consideremos la función $\psi(t) = W(\varphi(t))$, la cual es continua para todo $t \in [t_0, t_1]$ y $\psi(t_0) = 0, \psi(t_1) = W(P) \geq \alpha$. Así sigue la existencia de un $t^* \in (t_0, t_1)$ tal que $\psi(t^*) = C$, o bien $W(P^*) = C$, con $P^* = \varphi(t^*)$. Elijiendo $h = \alpha$, obtenemos el resultado deseado. ■

De la prueba del lema 5.1 se desprende que la parte cerrada de la superficie de nivel $W(x) = C$, está totalmente contenida en la bola $\overline{\mathbb{B}_R}$. Sin embargo, no queda excluída la posibilidad que otras partes de la superficie $W(x) = C$ estén ubicadas fuera de $\overline{\mathbb{B}_R}$. En efecto, consideramos la función

$$W(x) = \frac{x_1^2}{(1+x_1^2)^2} + \frac{x_2^2}{(1+x_2^2)^2} .$$

Es fácil ver que una parte de $W(x) = C$, se dispone cerca del origen $(0, 0)$ y otra en regiones alejadas del origen; ya que

$$\lim_{x_1 \rightarrow \infty} \frac{x_1}{1+x_1^2} = 0, \quad \lim_{x_2 \rightarrow \infty} \frac{x_2}{1+x_2^2} = 0$$

Otra observación tiene relación con el hecho de que si $W(x)$ es definida positiva, entonces no necesariamente todas sus superficies de nivel son cerradas. Para ello es suficiente considerar $W(x) = \frac{x_1^2}{1+x_1^2} + x_2^2$. Las curvas de nivel $\frac{x_1^2}{1+x_1^2} + x_2^2 = C$ son acotadas y cerradas si $C < 1$ y no cerradas para $C \geq 1$, (ver figura 5.2).

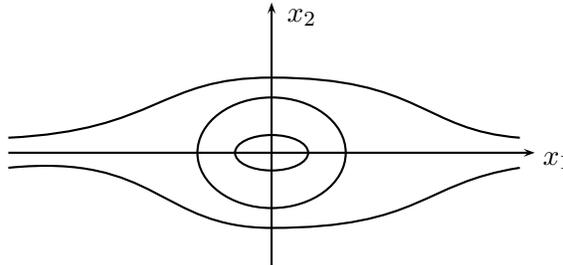


Figura 5.2

A continuación trataremos de caracterizar a las funciones definidas positivas de una manera más cómoda. Es claro que, si existe una función $a : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ continua, monótona creciente, $a(0) = 0$, tal que $V(t, x) \geq a(|x|)$, $\forall (t, x) \in J \times D$; entonces V es definida positiva. Para ello es suficiente tomar $W(x) = a(|x|)$. Desgraciadamente la recíproca no es cierta. Para ello elijamos $W(x) = \frac{x^2}{1+x^4}$. Es fácil ver que no existe una función “ a ” con las propiedades antes descritas tal que $W(x) \geq a(|x|)$, $x \in \mathbb{R}$. (Figura 5.3).

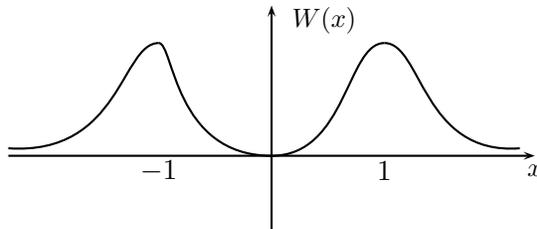


Figura 5.3

Sin embargo, localmente, ésto es posible.

Lema 5.2 *Supongamos que $V \in C[J \times D, \mathbb{R}_0^+]$ es definida positiva. Entonces para toda bola $\overline{B}_R \subset D$, existe una función continua $a : [0, R_0] \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ monótona creciente, $a(0) = 0$ tal que*

$$V(t, x) \geq a(|x|), \quad \forall (t, x) \in J \times \overline{B}_R.$$

Demostración. Como $V(t, x)$ es definida positiva, existe una función W definida positiva tal que

$$V(t, x) \geq W(x), \quad \forall (t, x) \in J \times \overline{B}_R.$$

Sea $R > 0$, tal que $\overline{B}_R \subset D$. Definamos una función $C : [0, R] \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ como sigue :
Para cada $r \in [0, R]$ ponemos

$$C(r) = \inf_{r \leq |x| \leq R} W(x).$$

Esta función está bien definida, ya que W está acotada inferiormente. Además es fácil verificar que :

- (a) $C(0) = 0$;
- (b) $\forall r_1 < r_2, C(r_1) \leq C(r_2)$,
- (c) $C(r) > 0, \forall r \in (0, R)$.

Para concluir la prueba es suficiente observar que dada una función C con las propiedades (a)-(c), siempre existe una función $a \in C[[0, R], \mathbb{R}_0^+]$, monótona creciente, $a(0) = 0$, tal que $a(r) \leq C(r), \forall r \in [0, R]$, (ver [9,p. 217]). ■

Sea $V \in C^1[J \times D, \mathbb{R}_0^+]$ y sea x una solución del sistema

$$x'(t) = f(t, x), \quad f(t, 0) = 0, \forall t > \tau. \quad (5.1)$$

Escribiendo

$$U(t) = V(t, x(t)),$$

por la regla de la cadena obtenemos

$$U'(t) = \frac{\partial V}{\partial t} + \langle \nabla V, x' \rangle = \frac{\partial V}{\partial t} + \langle \nabla V, f \rangle .$$

Por lo cual, para toda función $V \in C^1[J \times D, \mathbb{R}_0^+]$ se puede definir $\dot{V}_{(1)} : J \times D \rightarrow \mathbb{R}$, como sigue :

$$\dot{V}(t, x) = \frac{\partial V}{\partial t}(t, x) + \langle \nabla V, f \rangle .$$

Si $x(\cdot)$ es solución de (5.1), entonces $U'(t) = \dot{V}_{(1)}(t, x(t))$. Por esta razón a \dot{V} la llamaremos la derivada de V a lo largo de las soluciones de (5.1).

Notemos que todos los resultados que demostramos a continuación siguen siendo válidos si V es continua solamente. En este caso \dot{V} la definimos como sigue :

$$\dot{V}(t, x) = \overline{\lim}_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} [V(t+h, x+hf(t, x)) - V(t, x)].$$

§ 5.2 Teoremas sobre Estabilidad

Teorema 5.3 (Estabilidad) *Supongamos que:*

- (a) *Existe una función $V \in C^1[J \times D, \mathbb{R}_0^+]$ definida positiva, y*
- (b) *$\dot{V}(t, x) \leq 0, \forall (t, x) \in J \times D.$*

Entonces la solución $x = 0$ del sistema (5.1) es estable.

Demostración. Elijamos un número $R > 0$, tal que $\bar{\mathbb{B}}_R \subset D$, de acuerdo al Lema 5.2, existe una función continua, monótona creciente $a : [0, R] \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ tal que $a(0) = 0$ y

$$V(t, x) \geq a(|x|), \quad \forall (t, x) \in J \times \bar{\mathbb{B}}_R. \quad (5.2)$$

Como $\lim_{|x| \rightarrow 0} V(t_0, x) = 0$, entonces para cada $\varepsilon \in (0, R)$, existe un $\delta(t_0, \varepsilon) > 0$ tal que

$$V(t_0, x) < a(\varepsilon), \quad \forall x : |x| < \delta. \quad (5.3)$$

Sea $x(\cdot, t_0, x_0) : [t_0, \beta) \rightarrow D$, la solución de (5.1) con $|x_0| < \delta$.

Teniendo en cuenta (b), se sigue que :

$$\dot{V}_{(1)}(t, x(t)) \leq 0, \quad \forall t \in [t_0, \beta);$$

con $x(t) = x(t, t_0, x_0)$. De donde sigue que $V(t, x(t)) \leq V(t_0, x_0)$. Ahora, en virtud de la elección de ε , de (5.2) y (5.3), obtenemos

$$a(|x(t)|) \leq V(t, x(t)) \leq V(t_0, x_0) < a(\varepsilon), \quad \forall t \in [t_0, \beta).$$

Así, por la monotonía de la función a , se sigue que :

$$|x(t, t_0, x_0)| < \varepsilon, \quad \forall t \in [t_0, \beta).$$

Esto implica que $\beta = +\infty$ y que $x = 0$ es estable ■

Teorema 5.4 (Estabilidad Asintótica) *Supongamos que:*

- (a) *Existe una función $V \in C^1[J \times D, \mathbb{R}_0^+]$ definida positiva, y*
- (b) *\dot{V} es definida negativa sobre $J \times D.$*

Entonces $x = 0$ es asintóticamente estable.

Demostración. De la hipótesis (a) y (b) y del primer teorema de Liapunov, se sigue que $x = 0$ es estable. Mostremos que existe $\Delta > 0$, tal que $\lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t, t_0, x_0)| = 0$, para $|x_0| < \Delta$. Para concluir ésto probemos que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} V(t, x(t, t_0, x_0)) = 0 \quad \text{para } |x_0| < R. \quad (5.4)$$

Supongamos que se satisface (5.4). Entonces dado $\varepsilon > 0$

$$V(t, x(t, t_0, x_0)) < a(\varepsilon), \quad \forall t \geq t_0 + T(t_0, \varepsilon), \quad (5.5)$$

$|x_0| < R$ donde R y a son respectivamente la constante y la función que aparecen en la prueba del primer teorema de Liapunov. Teniendo en cuenta que V es definida positiva y (5.5), se tiene que

$$|x(t, t_0, x_0)| < \varepsilon, \quad \forall t \geq T(t_0, \varepsilon) + t_0, \quad |x_0| < R.$$

Probemos (5.4). Supongamos que existe $x_0 \in \mathbb{B}_R$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} V(t, x(t, t_0, x_0)) = \alpha > 0. \quad (5.6)$$

Notemos que este límite siempre existe, ya que V a lo largo de las soluciones de (5.1) es monótona decreciente y acotada inferiormente.

De (5.6), sigue que existe $\beta > 0$ tal que $|x(t)| = |x(t, t_0, x_0)| \geq \beta$, para todo $t \geq t_0$. En caso contrario, existe una sucesión $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $t \rightarrow \infty$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} |x(t_n)| = 0$. Esto conduce a un absurdo, ya que $0 = \lim_{n \rightarrow \infty} V(t_n, x(t_n)) = \lim_{t \rightarrow \infty} V(t, x(t)) = \alpha > 0$. Así, si $\alpha > 0$, entonces $|x(t)| \geq \beta > 0, \forall t \geq t_0$.

Por otra parte, de (b) se tiene que existe una función $W \in C[\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_0^+]$ definida positiva tal que

$$\dot{V}_{(1)}(t, x) \leq -W(x), \quad \forall (t, x) \in J \times D. \quad (5.7)$$

Pongamos $\gamma = \inf_{\beta \leq |x| \leq R} W(x)$. De (5.7), obtenemos

$$\dot{V}(t, x(t)) \leq -\gamma, \quad t \geq t_0.$$

De donde se sigue que

$$V(t, x(t)) \leq V(t_0, x_0) - \gamma(t - t_0), \quad \forall t \geq t_0.$$

Esto contradice la positividad de V para valores de t suficientemente grandes. ■

Teorema 5.5 (Inestabilidad) *Supongamos que:*

- (a) *Existe una función $V \in C^1[J \times D, \mathbb{R}]$, tal que $\lim_{|x| \rightarrow 0} V(t, x) = 0$, uniforme respecto a t en J .*
- (b) *\dot{V} es definida positiva.*
- (c) *Existe un t_0 en J tal que para cada ε , $0 < \varepsilon < R$, existe un $x_0 \in \mathbb{B}_\varepsilon$, tal que*

$$V(t_0, x_0)\dot{V}(t_0, x_0) > 0. \quad (5.8)$$

Entonces $x = 0$ es inestable.

Demostración. Como \dot{V} es definida positiva, existe una función $W \in C[\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_0^+]$ definida positiva tal que $\dot{V}(t, x) \geq W(x), \forall (t, x) \in J \times D$.

Además, de (a), se tiene que para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, tal que :

$$|V(t, x)| \leq \varepsilon, \quad \forall (t, x) \in J \times \mathbb{B}_\delta. \quad (5.9)$$

Además de (c), se sigue que para todo $\delta_1, 0 < \delta_1 < \delta$, existe un $x_0 \in \mathbb{B}_{\delta_1}$, tal que $V(t_0, x_0) = \alpha > 0$. Pongamos $\varphi(t) = x(t, t_0, x_0)$. Para probar la inestabilidad de $x = 0$, es suficiente mostrar que existe un $t_1 > t_0$ tal que $|\varphi(t_1)| > \delta$. Hagámoslo por reducción al absurdo. Supongamos que $|\varphi(t)| \leq \delta, \forall t \geq t_0$.

De (a) y (b) se sigue la existencia de $\beta > 0$ tal que

$$0 < \beta \leq |\varphi(t)| \leq \delta, \quad \forall t \geq t_0. \quad (5.10)$$

Denotemos por $\gamma = \inf_{\beta \leq |x| \leq \delta} W(x)$.

De (5.8) y la definición de γ , se sigue,

$$\dot{V}(t, \varphi(t)) \geq \gamma, \quad t \geq t_0;$$

lo cual implica que

$$V(t, \varphi(t)) \geq V(t_0, x_0) + \gamma(t - t_0) = \alpha + \gamma(t - t_0), \forall t \geq t_0.$$

Como $\alpha > 0$ y $\gamma > 0$, se sigue que V no está acotada a lo largo de $\varphi(t)$. Lo cual es una contradicción ya que $(t, \varphi(t)) \in J \times \mathbb{B}_\delta, \forall t \geq t_0$ y en virtud de (5.9) $|V(t, \varphi(t))| < \varepsilon, \forall t \geq t_0$. ■

A los teoremas (5.2),(5.3) y (5.4) se les llama comúnmente primer, segundo y tercer teorema de Liapunov, respectivamente.

Teorema 5.6 (Estabilidad Uniforme) *Supongamos que:*

- (a) *Existe una función $V \in C^1[J \times D, \mathbb{R}]$ definida positiva,*
- (b) *Existe una función monótona creciente $C \in C[\mathbb{R}_0^+, \mathbb{R}_0^+]$, $C(0) = 0$, tal que $V(t, x) \leq C(|x|)$, $\forall (t, x) \in J \times D$,*
- (c) *\dot{V} es negativa $\forall (t, x) \in J \times D$.*

Entonces $x = 0$ es uniformemente estable.

Demostración. Sea $R > 0$, tal que $\overline{\mathbb{B}}_R \subset D$. Teniendo en cuenta (a) y (b) se tiene que existe una función $a \in C([0, R], \mathbb{R}_0^+)$, monótona creciente, $a(0) = 0$, tal que

$$a(|x|) \leq V(t, x) \leq C(|x|), \quad \forall (t, x) \in J \times \overline{\mathbb{B}}_R. \quad (5.11)$$

Ahora, por las propiedades de a y C , para cada $\varepsilon, 0 < \varepsilon < R$, podemos elegir un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0, \delta < \varepsilon$, tal que

$$C(\delta) < a(\varepsilon). \quad (5.12)$$

Consideremos $(t_0, x_0) \in J \times \mathbb{B}_\delta$. Sea $x(\cdot, t_0, x_0) : [t_0, \beta) \rightarrow D$. Teniendo en cuenta que $\dot{V}_{(1)}$ es decreciente a lo largo de las soluciones de (5.1), se sigue que $x(t, t_0, x_0) \in \overline{\mathbb{B}}_R, \forall t \geq t_0$. Por lo tanto, en virtud de (5.11) y (5.12), se sigue

$$a(|x(t, t_0, x_0)|) \leq V(t, x(t, t_0, x_0)) \leq V(t_0, x_0) \leq C(\delta) < a(\varepsilon).$$

Lo cual implica que $|x(t, t_0, x_0)| < \varepsilon, \forall t \in [t_0, \beta)$ y $x_0 \in \mathbb{B}_\delta$. De donde sigue inmediatamente la estabilidad uniforme de $x = 0$. ■

Teorema 5.7 (Estabilidad Asintótica Uniforme) *Supongamos que se verifican las condiciones (a) y (b) del teorema 5.5, y \dot{V} es definida negativa $\forall (t, x) \in J \times D$. Entonces $x = 0$ es uniforme asintóticamente estable.*

Demostración. Según el teorema 5.6, $x = 0$ es uniformemente estable. Por lo tanto, dado $\varepsilon = R$, existe un $\delta_0(R) > 0$ tal que si $x \in \mathbb{B}_{\delta_0}$, entonces $|x(t, t_0, x_0)| < R, \forall t \geq t_0$. Mostremos que $\lim_{t \rightarrow \infty^+} |x(t, t_0, x_0)| = 0, \forall x_0 \in \mathbb{B}_{\delta_0}$, uniforme respecto a t_0 en J . De la prueba del teorema 5.6 se desprende que δ_0 lo podemos elegir de forma que

$$C(\delta_0) < a(R). \quad (5.13)$$

Como

$$a(|x|) \leq V(t, x) \leq C(|x|), \quad \forall (t, x) \in J \times \overline{\mathbb{B}}_R, \quad (5.14)$$

se sigue que $a(R) \leq C(R)$. Por lo tanto, $0 < \delta_0 < R$.

Sea $\eta \in (0, \delta_0]$, arbitrario. Elijamos $\gamma > 0, \gamma < \eta$, de modo que

$$C(\gamma) < a(\eta). \quad (5.15)$$

Pongamos $\alpha^* = \inf\{W(x) : \gamma \leq |x| \leq R\}$ donde W viene dada por (5.7). Elijamos $T(\eta) > C(\delta_0)/\alpha^*$. Probemos que para cada $x_0 \in \mathbb{B}_{\delta_0}$, existe un $t_1 \in [t_0, t_0 + T(\eta)]$, tal que $|x(t_1, t_0, x_0)| < \gamma$.

Supongamos que existe un $x_0^* \in \mathbb{B}_{\delta_0}$, tal que

$$|x(t, t_0, x_0^*)| \geq \gamma, \quad t \in [t_0, t_0 + T(\eta)].$$

Como $|x(t, t_0, x_0^*)| \leq R, \forall t \geq t_0$, se sigue que

$$\dot{V}(t, x(t, t_0, x_0^*)) \leq -W(x(t, t_0, x_0^*)) \leq -\alpha,$$

para todo $t \in [t_0, t_0 + T(\eta)]$. De donde sigue:

$$V(t, x(t, t_0, x_0^*)) \leq V(t_0, x_0) - \alpha^*T(\eta) \leq C(\delta_0) - \alpha^*T(\eta) < 0.$$

Contradicción . Así, para cada $x_0 \in \mathbb{B}_{\delta_0}$, existe $t_1(x_0) \in [t_0, T(\eta) + t_0]$ tal que

$$|x(t_1, t_0, x_0)| < \gamma.$$

Del hecho que \dot{V} es definida negativa y (5.14) y (5.15), obtenemos

$$a(|x(t, t_0, x_0)|) \leq V(t, x(t, t_0, x_0)) \leq V(t_1, x(t_1, t_0, x_0)) \leq C(\gamma) < a(\eta),$$

para todo $t \geq t_1$. En particular,

$$|x(t, t_0, x_0)| < \eta, \forall t \geq t_0 + T(\eta), \quad \forall x_0 \in \mathbb{B}_\delta. \blacksquare$$

En general, es difícil construir funciones de Liapunov, sin embargo indicaremos con algunos ejemplos cómo hacer los primeros ensayos para construir tales funciones.

Ejemplo 5.1 Consideremos la ecuación de segundo orden $x'' + q(x) = 0$, con $q \in C^1(\mathbb{R})$ tal que $q(0) = 0$ y $xq(x) > 0$ si $x \neq 0$. El sistema equivalente a tal ecuación es:

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -q(x_1). \end{cases} \quad (5.16)$$

Por hipótesis, $(x_1, x_2) = (0, 0)$ es el único punto crítico del sistema (5.16). Por otra parte, denotando por

$$E(x_1) = \int_0^{x_1} q(s) ds$$

la energía potencial del sistema (5.16), la energía total del sistema viene dada por

$$V(x_1, x_2) = \frac{x_2^2}{2} + E(x_1).$$

Mostremos que $V(x_1, x_2)$ es una función de Liapunov asociada al sistema (5.16). En efecto,

- (a) $V(0,0) = 0$, $xq(x) > 0$, implica que $V(x_1, x_2) > 0$ para $(x_1, x_2) \neq (0,0)$. Además, $V \in C^1(\mathbb{R}^2)$.
- (b) $\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x_1}x'_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2}x'_2 = q(x_1)x'_1 + x_2x'_2 = 0$. Por tanto, la solución trivial del sistema (5.16) es estable.

Ejemplo 5.2 Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x'_1 = -x_2 - x_1^3 \\ x'_2 = x_1 - x_2^3 \end{cases} \quad (5.17)$$

Definamos $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$. La función $V(x_1, x_2)$ es definida positiva y $\dot{V} = 2x_1(-x_2 - x_1^3) + 2x_2(x_1 - x_2^3) = -2(x_1^4 + x_2^4)$ es negativa. Más aún, $\dot{V} = 0$ si y sólo si $(x_1, x_2) = (0,0)$. Así, la solución trivial de (5.17) es asintóticamente estable.

Ejemplo 5.3 Consideremos el sistema

$$\begin{cases} x'_1 = 3x_1 + x_2^2 \\ x'_2 = -2x_2 + x_1^3 \end{cases} \quad (5.18)$$

Definamos

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2.$$

V es continua en \mathbb{R}^2 , es diferenciable con continuidad, $V(0,0) = 0$ y toma valores positivos en todo entorno del origen si $x_1 \geq x_2$. Además,

$$V(x_1, x_2) = \langle \nabla V, (x'_1, x'_2) \rangle = (6x_1^2 + 4x_2^2) + (2x_1x_2^2 - 2x_2x_1^3).$$

Luego, si $|x| = |(x_1, x_2)| = \max(|x_1|, |x_2|)$, es suficientemente pequeño, entonces el signo de V' está determinado por el primer paréntesis de la expresión anterior. Como además $V'(0,0) = 0$, se sigue que V' es definida positiva cerca del origen, por tanto, la solución trivial del sistema (5.18) es inestable.

§ 5.3 Funciones de Liapunov para Sistemas Lineales

En este párrafo nos ocuparemos de la construcción de funciones de Liapunov para sistemas lineales a coeficientes constantes.

Sea

$$x' = Ax, \quad \text{con } A \in \mathbb{R}^{n \times n}. \quad (5.19)$$

Sea $V(x) = \langle x, Bx \rangle$, donde B es una matriz real $n \times n$ simétrica, definida positiva.

Derivando V , en virtud de (5.19), se tiene :

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \langle x', Bx \rangle + \langle x, Bx' \rangle \\ &= \langle Ax, Bx \rangle + \langle x, BAx \rangle \\ &= \langle x, (A^T B + BA)x \rangle. \end{aligned}$$

Ahora, tratemos que se cumpla la siguiente igualdad

$$\dot{V}(x) = -W(x),$$

con $W(x) = \langle x, Cx \rangle$, $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simétrica, definida positiva. Esto es posible si y sólo si

$$A^T B + BA = -C.$$

Teorema 5.8 *El sistema (5.19) es uniforme asintóticamente estable si y sólo si para cada forma cuadrática $W(x) = \langle x, Cx \rangle$ definida positiva, existe una forma cuadrática $V(x) = \langle x, Bx \rangle$ definida positiva tal que*

$$\dot{V}(x) = -W(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Antes de probar el teorema anterior, procederemos a hacer algunas observaciones previas y demostraremos algunas afirmaciones que serán imprescindibles en el curso de la prueba del teorema 5.8.

Proposición 5.9 *Toda forma cuadrática $V(x) = \langle x, Bx \rangle$ satisface las siguientes desigualdades:*

$$(a) \quad \lambda_1 |x|^2 \leq V(x) \leq \lambda_2 |x|^2,$$

$$(b) \quad |\nabla V(x)| \leq \lambda_2 |x|^2,$$

donde $\lambda_1 = \lambda_{\min}(B)$ y $\lambda_2 = \lambda_{\max}(B)$ son el menor y mayor autovalor de la matriz B , respectivamente.

Demostración. Como B es una matriz simétrica, $B = B^T$. Entonces existe una matriz U ortogonal ($UU^T = I$) tal que

$$UBU^{-1} = UBU^T = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix}.$$

Pongamos $y = Ux$. Luego, $x = U^{-1}y$. De esto se sigue que

$$\begin{aligned} V(x) &= \langle x, Bx \rangle = \langle U^{-1}y, BU^{-1}y \rangle = \langle y, UBU^{-1}y \rangle \\ &= \langle y, UBU^T y \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2, \end{aligned}$$

y además

$$|y|^2 = \langle y, y \rangle = \langle Ux, Ux \rangle = |x|^2;$$

Lo cual prueba (a).

Por otra parte, $\nabla V(x) = 2Bx$, luego,

$$|\nabla V(x)| \leq 2|B||x|;$$

donde

$$|B| = \lambda_{\max}^{\frac{1}{2}}(B^T B) = \lambda_{\max}(B) = \lambda_2.$$

En efecto, si A es una matriz arbitraria se tiene que

$$\langle A^T Ax, x \rangle = \langle Ax, Ax \rangle = |Ax|^2.$$

Por lo tanto,

$$|Ax| = \langle A^T Ax, x \rangle^{\frac{1}{2}},$$

entonces

$$|A| = \lambda_{\max}^{\frac{1}{2}}(A^T A),$$

ésto implica (b). ■

Proposición 5.10 Sean $A_1, B_1, C_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tales que $B_1 \neq 0$ y $A_1 B_1 = B_1 C_1$. Entonces A_1 y C_1 tienen un autovalor común.

Demostración. Supongamos que A_1 y C_1 no tienen un autovalor común. Luego, los polinomios característicos

$$P(\lambda) = \det(A_1 - \lambda I)$$

y

$$Q(\lambda) = \det(C_1 - \lambda I),$$

son primos entre sí. Entonces existen polinomios $P_1(\lambda)$ y $Q_1(\lambda)$ tales que

$$P(\lambda)P_1(\lambda) + Q(\lambda)Q_1(\lambda) = 1.$$

Denotemos con $h(\lambda) = P(\lambda)P_1(\lambda)$, luego,

$$1 - h(\lambda) = Q(\lambda)Q_1(\lambda).$$

De acuerdo al teorema de Caley-Hamilton

$$h(A_1) = 0 \quad y \quad h(C_1) = 1.$$

Por otro lado, como

$$P(\lambda) = a_n\lambda^n + \cdots + a_1\lambda + a_0 \quad , \quad P_1(\lambda) = b_m\lambda^m + \cdots + b_1\lambda + b_0$$

$$P(A_1) = a_nA_1^n + \cdots + a_1A_1 + a_0 \quad , \quad P_1(C_1) = b_mC_1^m + \cdots + b_1C_1 + b_0$$

y por hipótesis tenemos $A_1B_1 = B_1C_1$, entonces

$$\begin{aligned} h(A_1)B_1 &= P_1(A_1)P(A_1)B_1 \\ &= P_1(A_1)(a_nA_1^nB_1 + \cdots + a_1A_1B_1 + a_0B_1) \\ &= P_1(A_1)(a_nB_1C_1^n + \cdots + a_1B_1C_1 + a_0B_1) \\ &= P_1(A_1)B_1P(C_1) \\ &= B_1P_1(C_1)P(C_1) \\ &= B_1h(C_1), \end{aligned}$$

entonces $B_1 = 0$. Contradicción. ■

Proposición 5.11 *Si A es una matriz con todos sus autovalores con parte real negativa, entonces la ecuación matricial*

$$A^T B + BA = -C \tag{5.20}$$

posee una única solución.

Demostración. Definamos el siguiente operador

$$F : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$$

de forma que

$$F(B) = A^T B + BA.$$

Los autovalores de F son reales ya que $F(B)$ es simétrica. En efecto,

$$\begin{aligned} F^T(B) &= (A^T B + BA)^T = (A^T B)^T + (BA)^T \\ &= B^T A + A^T B^T = BA + A^T B \\ &= F(B). \end{aligned}$$

A fin de demostrar que (5.20) tiene solución, es suficiente ver que F es invertible. Lo cual es equivalente a mostrar que ningún autovalor de F es nulo ya que

$$\det F(B) = \prod_{i=1}^n \mu_i.$$

Sea μ cualquier autovalor de B y sea $B \neq 0$ tal que $F(B) = \mu B$. Luego,

$$A^T B + BA = \mu B;$$

entonces

$$(A^T - \mu I)B = -BA.$$

Por la proposición previa, tomando $A_1 = A^T - \mu I$, $B_1 = B \neq 0$ y $C_1 = -A$, se tiene que $(A^T - \mu I)$ y $(-A)$ poseen un autovalor común.

Tomando en cuenta que los autovalores de $A^T - \mu I$ son $\lambda_i - \mu$ y los de $-A$ son λ_k ; y el hecho que para todo μ se verifica que

$$\mu = \lambda_i + \lambda_k \neq 0,$$

entonces F es invertible.

La unicidad sigue del hecho que la inversa es única. ■

Proposición 5.12 *Si A es una matriz con todos sus autovalores con parte real negativa, entonces la única solución de la ecuación $A^T B + BA = -C$, viene dada por*

$$B = \int_0^\infty \exp(A^T t) C \exp(At) dt.$$

Demostración. Consideremos la ecuación diferencial matricial

$$\frac{dz}{dt} = A^T z(t) + z(t)A, \quad (5.21)$$

$$z(0) = -C. \quad (5.22)$$

La solución de (5.21),(5.22) viene dada por

$$z(t) = -\exp(A^T t)C \exp(At).$$

Ahora, como $\text{Re}\lambda(A) < 0$, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0.$$

Integrando (5.21) se tiene que

$$z(t) - z(0) = A^T \int_0^t z(s)ds + \int_0^t z(s)ds A$$

y haciendo tender $t \rightarrow \infty$, se obtiene

$$-C = A^T B + BA. \blacksquare$$

Proposición 5.13 *Si A posee todos sus autovalores con parte real negativa y C es definida positiva, entonces B también es definida positiva.*

Demostración. Sea $x_0 \neq 0$. Luego

$$\begin{aligned} \langle x_0, Bx_0 \rangle &= \langle x_0, \int_0^\infty \exp(A^T t)C \exp(At) dt x_0 \rangle \\ &= \int_0^\infty \langle \exp(At)x_0, C \exp(At)x_0 \rangle dt. \end{aligned}$$

De donde se sigue que:

$$\langle x_0, Bx_0 \rangle = \int_0^\infty \langle x(t, t_0, x_0), Cx(t, t_0, x_0) \rangle dt,$$

lo cual implica

$$x_0^T Bx_0 \geq 0 \quad y \quad \langle x_0, Bx_0 \rangle = 0 \quad \text{si y solo si} \quad x_0 = 0. \blacksquare$$

Procedamos a demostrar el teorema 5.8 .

La necesidad sigue de las proposiciones (??) y (5.12).

La suficiencia se obtiene como sigue. Supongamos que $V(x) = \langle x, Bx \rangle$ y $\dot{V}(x) = -W(x)$ con $W(x) = \langle x, Cx \rangle$. Luego, por la proposición 5.9 se tiene que

$$\begin{aligned}\lambda_{\min}(B)|x|^2 &\leq V(x) \leq \lambda_{\max}(B)|x|^2 \\ \lambda_{\min}(C)|x|^2 &\leq W(x) \leq \lambda_{\max}(C)|x|^2.\end{aligned}$$

Entonces

$$\frac{dV}{dt} = -W(x) \leq -\lambda_{\min}(C)|x|^2 \leq -\frac{\lambda_{\min}(C)}{\lambda_{\max}(B)}V(x),$$

integrando, obtenemos

$$V(x(t)) \leq V(x(0)) \exp(-\alpha t), \quad t \geq 0,$$

con

$$\alpha = \frac{\lambda_{\min}(C)}{\lambda_{\max}(B)}.$$

De modo que:

$$|x(t)|^2 \leq \frac{\lambda_{\max}(B)}{\lambda_{\min}(B)} |x(0)|^2 \exp(-\alpha t),$$

y por lo tanto:

$$|x(t)| \leq B^* |x(0)| \exp\left(-\frac{\alpha}{2}t\right), \quad t \geq 0$$

con

$$B^* = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(B)}{\lambda_{\min}(B)}}. \quad \blacksquare$$

§ 5.4 Inestabilidad de Sistemas Semi-lineales

Consideremos el sistema semi-lineal

$$x' = Ax + f(x), \quad (5.23)$$

con $f(0) = 0$ y $\lim_{|x| \rightarrow 0} \frac{|f(x)|}{|x|} = 0$. Además, supondremos que $f \in C^1[\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n]$.

Es conocido que en el caso que la matriz sea estable; es decir, todos sus autovalores tiene parte real negativa, la solución trivial de (5.23) es uniforme asintóticamente estable (Teorema de Perron).

En el caso que uno de los autovalores de la matriz A tenga parte real positiva, probaremos vía segundo método de Liapunov, que la solución trivial del sistema (5.23) es inestable.

En primer lugar demostraremos la siguiente afirmación:

Teorema 5.14 *Supongamos que A posee un autovalor con parte real positiva y $\operatorname{Re}(\lambda_i + \lambda_k) \neq 0, \forall i \neq k$. Entonces dada una forma cuadrática $W = \langle x, Cx \rangle$ definida positiva, existe una forma cuadrática $V = \langle x, Bx \rangle$ y un $\alpha > 0$ tal que*

- (i) $\dot{V}_{(5.19)}(x) = \alpha V(x) + W(x)$,
- (ii) Para cada $\varepsilon > 0$, existe $x_0 \in \mathbb{B}_\varepsilon$ tal que $V(x_0) > 0$.

Demostración. Consideremos el sistema auxiliar

$$x' = A^*x \tag{5.24}$$

donde $A^* = A - \frac{\alpha}{2}I$.

Sea ρ un autovalor de A^* . Luego, existe $x \neq 0$ tal que $A^*x = \rho x$. De donde obtenemos que $\lambda = \rho + \frac{\alpha}{2}$ es un autovalor de la matriz A , ya que

$$Ax = (\rho + \frac{\alpha}{2})x.$$

Análogamente se prueba que si λ es un autovalor de A , entonces $\rho = \lambda - \frac{\alpha}{2}$ es un autovalor de A^* .

Elijamos $\alpha > 0$, de forma que :

- (a) Si $\text{Re}\lambda_i > 0$, entonces $\text{Re}\rho_i > 0$; y
- (b) $\rho_i + \rho_k \neq 0, \forall i \neq k$.

Esta elección siempre es posible; ya que los autovalores de A y A^* están interrelacionados a través de

$$\lambda_i = \rho_i + \frac{\alpha}{2}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

Es suficiente elegir $0 < \alpha < \min\{\text{Re}\lambda_i : \text{Re}\lambda_i > 0\}$ y $\text{Re}(\lambda_i + \lambda_k) \neq 0, \quad \forall i \neq k$.

Sea $W(x) = \langle x, Cx \rangle$ una forma cuadrática definida positiva. Mostremos que existe una forma cuadrática

$$V(x) = \langle x, Bx \rangle$$

tal que la derivada de V a lo largo de las soluciones del sistema (5.24) satisface que:

$$\dot{V}_{(5.24)}(x) = W(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Para lo cual es suficiente probar que la ecuación matricial $A^{*T}B + BA^* = C$ admite una solución.

Al igual que como lo hicimos en la prueba de la proposición 5.11 se demuestra que el operador $F : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ definido por $F(B) = A^{*T}B + BA^*$, es invertible, debido a que la condición (b) implica que ningún autovalor de F es nulo (recordemos que la invertibilidad de F depende exclusivamente del hecho que $\rho_i + \rho_k \neq 0, \forall i \neq k$).

De la unicidad de F^{-1} sigue que V está unívocamente determinada. Por lo tanto hemos probado que $\dot{V}_{(5.24)}(x) = W(x)$.

Sea V la forma cuadrática previamente hallada y calculemos $\dot{V}_{(5.19)}$. Por una parte tenemos que

$$\dot{V}_{(5.24)}(x) = \langle x, (A^T B + BA)x \rangle - \alpha \langle x, Bx \rangle .$$

De donde sigue que

$$\dot{V}_{(5.24)}(x) = \dot{V}_{(5.19)}(x) - \alpha V(x),$$

lo cual automáticamente prueba (a).

Probemos por último que dado $\varepsilon > 0$, existe $x_0 \in \mathbb{B}_\varepsilon$ tal que $V(x_0) > 0$. En efecto, supongamos que existe $R > 0$ tal que $V(x) \leq 0$, para todo $x \in \mathbb{B}_R$. Pueden ocurrir dos casos :

- (1) V es definida negativa;
- (2) Existe $x^* \in \mathbb{B}_R, (x^* \neq 0)$, tal que $V(x^*) = 0$

En el primer caso, poniendo $V_1 = -V$, se tiene que V_1 es definida positiva y como $\dot{V}_1 = -\dot{V} = -W$ es definida negativa, entonces en virtud del teorema 5.6, $x = 0$ es asintóticamente estable. Contradicción.

En el segundo caso, consideremos la solución $x(\cdot, t_0, x^*) : [t_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ y mostremos que en este caso existe $x_0 \neq 0$, tal que $V(x_0) > 0$.

Pongamos $\varphi(t) = V(x(t, t_0, x^*))$. Luego,

$$\dot{\varphi}(t) = \dot{V}(x(t, t_0, x^*)) = W(x(t, t_0, x^*)) - \alpha V(x(t, t_0, x^*)), \quad t \geq t_0.$$

Poniendo $t = t_0$ en la igualdad anterior, obtenemos que $\varphi'(t_0) > 0$. Por lo tanto, existe un entorno de $t_0, [t_0, t_0 + \delta]$ donde $\varphi'(t) > 0$. Teniendo en cuenta ésto y la igualdad:

$$V(x(t, t_0, x^*)) = V(x^*) + \int_{t_0}^t \varphi'(s) ds,$$

obtenemos que $V(x(t, t_0, x^*)) > 0, \forall t \in (t_0, t_0 + \delta)$. Lo cual es una contradicción. ■

Teorema 5.15 Sean $W(x) = \langle x, Cx \rangle$ una forma cuadrática definida positiva y $V(x) = \langle x, Bx \rangle$ una forma cuadrática arbitraria. Entonces existe $R > 0$, tal que

$$W(x) + (\nabla V(x))^T f(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{B}_R.$$

Demostración. De la proposición 5.9, se tiene que

$$\lambda_1|x| \leq W(x) \leq \lambda_2|x| \quad y \quad l_1|x|^2 \leq V(x) \leq l_2|x|^2,$$

donde $\lambda_1, \lambda_2 > 0, l_1 = l_{\min}(B)$ y $l_2 = l_{\max}(B)$. Además, $|\nabla V(x)| \leq k|x|$, con $k = 2|B|$. Luego,

$$| \langle \nabla V(x), f(x) \rangle | \leq |\nabla V(x)| |f(x)| \leq k|x| |f(x)|.$$

Como $\lim_{|x| \rightarrow 0} |f(x)|/|x| = 0$, entonces dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que $|f(x)| < \varepsilon|x|$, $\forall x : |x| < \delta$. De modo que

$$| \langle \nabla V(x), f(x) \rangle | \leq k\varepsilon|x|^2, \quad \forall x : |x| < \delta.$$

Por otra parte, tenemos que:

$$W(x) \geq \lambda_1|x|^2 - k\varepsilon|x|^2 = (\lambda_1 - k\varepsilon)|x|^2.$$

Eligiendo ε de modo que $\lambda_1 - k\varepsilon > 0$, obtenemos

$$W(x) + (\nabla V(x))^T f(x) > 0, \quad \forall x : |x| < \delta(\varepsilon). \blacksquare$$

Teorema 5.16 (Teorema de Inestabilidad) *Consideremos el sistema (5.23) con las condiciones dadas. Si existe $\lambda(A)$ tal que $\operatorname{Re}\lambda > 0$, entonces $x = 0$ es inestable.*

Demostración. Por el teorema 5.13, dada $W(x) = |x|^2$, existe $V(x)$ y $\alpha > 0$ tales que :

- (a) $\dot{V}_{(5.19)}(x) = \alpha V(x) + |x|^2$,
- (b) $\forall \varepsilon_1 > 0$, existe $x_0 \in \mathbb{B}_{\varepsilon_1}$ tal que $V(x_0) > 0$.

Calculemos $\dot{V}_{(5.23)}$

$$\begin{aligned} \dot{V}_{(5.23)}(x) &= \langle x', Bx \rangle + \langle x, Bx' \rangle \\ &= \langle Ax + f(x), Bx \rangle + \langle x, B(Ax + f(x)) \rangle \\ &= \langle Ax, Bx \rangle + \langle f(x), Bx \rangle + \langle x, BAx \rangle + \langle x, Bf(x) \rangle \\ &= \dot{V}_{(5.19)}(x) + 2 \langle f(x), Bx \rangle = \alpha V(x) + |x|^2 + \langle f(x), 2Bx \rangle. \end{aligned}$$

Lo cual implica que

$$\dot{V}_{(5.23)}(x) = \alpha V(x) + |x|^2 + \langle f(x), \nabla V(x) \rangle.$$

Por el teorema 5.13, existe $R > 0$ tal que :

$$|x|^2 + (\nabla V(x))^T f(x) \geq 0, \quad \forall x : |x| \leq R.$$

Sea ε_1 arbitrario, con $0 < \varepsilon_1 < R$. Sea $x : [0, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ la solución de (5.23) con $x(0) = x_0, |x_0| < \varepsilon_1$ y $V(x_0) > 0$. Si $\beta < \infty$, entonces la solución no es prolongable y por lo tanto se sigue que $x = 0$ es inestable.

Si $\beta = \infty$, entonces pueden ocurrir dos casos:

- (1) La solución se escapa de \mathbb{B}_R en tiempo finito.
- (2) La solución $x(t) \in \mathbb{B}_R, \forall t \geq 0$.

En el primer caso eligiendo $\varepsilon = R$, concluimos que la solución es inestable.

En el segundo caso consideremos la ecuación

$$\dot{V}(x(t)) = \alpha V(x(t)) + F(t),$$

donde $F(t) = |x(t)|^2 + \langle \nabla V(x(t)), f(x(t)) \rangle$. Como $|x(t)| \leq R, \forall t \geq 0$, del teorema 5.15, sigue que $F(t) \geq 0, \forall t \geq 0$. Integrando la ecuación anterior, obtenemos

$$V(x(t)) = e^{\alpha t} V(x_0) + \int_0^t \exp(\alpha(t-s)) F(s) ds, \quad t \geq 0.$$

De donde se sigue que:

$$V(x(t)) \geq e^{\alpha t} V(x_0), \quad \forall t \geq 0, \quad \text{con } \alpha > 0.$$

Haciendo tender $t \rightarrow +\infty$, obtenemos que $V(x(t)) \rightarrow \infty$. Contradicción ■

§ 5.5 Comentarios y Sugerencias

Para el análisis de la estabilidad de sistemas no lineales, en general, el único método universal es el segundo método de Liapunov, como ya lo señalamos su desventaja radica en la construcción de funciones de Liapunov. Una manera de aminorar estas dificultades es usando funciones vectoriales de Liapunov, recomendamos consultar el libro de Lakshmikantham y Leela [14].

Un problema muy interesante pero menos estudiado es el de la extensión del segundo método de Liapunov para sistemas singularmente perturbados.

§ 5.6 Ejercicios y Problemas

1. Sea $A \in C[J, \mathbb{R}^{n \times n}]$ con $J = [t_0, \infty)$ y $A(t) = A(t)^T$. Denotemos por $\lambda^+(t) = \max\{\lambda : \lambda \in \sigma(A(t))\}$. Pruebe que si existe $h > 0$ tal que $\lambda^+(t) \leq -h$, para todo $t \geq t_0$, entonces la solución trivial del sistema $y' = A(t)y$ es uniformemente asintóticamente estable.
2. Sean A_0, \dots, A_m elementos de $\mathbb{R}^{n \times n}$. Pruebe que si todos los autovalores de la matriz A_0 tienen parte real negativa, entonces la solución trivial del sistema

$$y' = (A_0 t^m + A_1 t^{m-1} + \dots + A_m)y$$

es asintóticamente estable sobre el intervalo $(0, +\infty)$.

Ayuda: Introduzca un nuevo tiempo $\tau = \frac{1}{m+1}t^{m+1}$.

3. Estudie la estabilidad asintótica de la solución trivial de la ecuación

$$y'' + ay' + b \sin y = 0, \quad a > 0, b > 0,$$

usando el método de las funciones de Liapunov.

4. Considere la ecuación diferencial

$$y' = f(t, y) \quad , \quad (5.25)$$

donde $J = [t_0, \infty)$, $f(t, 0) = 0, \forall t \geq t_0$ y $f \in C[J \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n]$; y suponga que existe $\lambda \in C(J, \mathbb{R})$ tal que $y^T f(t, y) \leq -\lambda(t)|y|^2$ para $t \geq t_0, y \in \mathbb{R}^n$.

Pruebe que :

- a) Si $\lambda(t) \geq 0, \forall t > t_0$, entonces la solución trivial de (5.25) es uniformemente estable sobre J .
 - b) Si $\int_{t_0}^{\infty} \lambda(s)ds = \infty$, entonces $y \equiv 0$ es asintóticamente estable.
 - c) ¿Qué sucede si $\lambda(t) < 0$ ó $\lambda(t)$ es de signo variable ?.
5. Estudie la estabilidad de la solución trivial de la ecuación diferencial

$$y'' + f(y)y' + h(y) = 0,$$

donde $yh(y) > 0, f(y) > 0$, si $y \neq 0$; $f(0) = h(0) = 0$ y $H(y) = \int_0^y h(s)ds \rightarrow \infty$, cuando $|y| \rightarrow \infty$.

Ayuda : Ver Hale [11], p. 298.

6. Estudie la estabilidad de la solución trivial de la ecuación de Van der Pol

$$y'' + \varepsilon(y^2 - 1)y' + y = 0,$$

vía funciones de Liapunov.

7. Considere el sistema

$$\begin{aligned} x' &= y - xf(x, y) \\ y' &= -x - yf(x, y) \quad , \end{aligned}$$

con $f(0, 0) = 0$. Pruebe que:

- i) $f(x, y) \geq 0$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, implica que la solución trivial es estable.
- ii) $f(x, y) \leq 0$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ implica que la solución trivial es inestable.

8. Estudie la estabilidad de la solución trivial de las siguientes ecuaciones diferenciales :

a) $z'' + az' + f(z) = 0$, con $f(0) = 0, zf(z) > 0$ si $z \neq 0$.

b)

$$\begin{aligned} x_1' &= ax_1^3 + bx_2 \\ x_2' &= -cx_1 + dx_2^3 \end{aligned}$$

donde a, b, c, d son constantes reales.

c)

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_3 - ax_2 \\ x_3' &= cx_1 - F(x_2) \quad , \end{aligned}$$

donde a y c son constantes positivas y la función $F(x)$ satisface las siguientes condiciones

$$F(0) = 0 ; \frac{aF(x_2)}{x_2} > c, \text{ si } x_2 \neq 0; \lim_{|x_2| \rightarrow \infty} \int_0^{x_2} (F(s) - \frac{cs}{a}) ds = +\infty.$$

Ayuda : Defina la función de Liapunov en el caso a) como una forma cuadrática más $2 \int_0^z f(s) ds$ y en el caso c) como una forma cuadrática más $\int_0^{x_2} F(s) ds$.

9. Considere el sistema

$$x_j' = f_j(x_1, \dots, x_j) \quad , \quad j = 1, \dots, n \quad , \quad (5.26)$$

donde $f_j(x_1, \dots, x_j)$ es globalmente Lipschitz sobre \mathbb{R}^n y $f_j(0) = 0$.

Pruebe que la solución trivial del sistema (5.26) es uniformemente asintóticamente estable si y sólo si la solución trivial de cada uno de las ecuaciones diferenciales $x_1' = f_1(x_1), \dots, x_n' = f_n(0, 0, \dots, 0, x_n)$ también es uniformemente asintóticamente estable .

Capítulo 6

Introducción a Sistemas Dinámicos

§ 6.1 Clasificación de Orbitas y Teorema de Poincaré-Bendixson

Consideremos el sistema autónomo

$$x' = g(x). \quad (6.1)$$

El espacio de la variable dependiente x lo designaremos por X y será por lo general \mathbb{R}^n . Al espacio X lo denominaremos espacio de fase (o espacio de estado). Toda solución de (6.1) puede pensarse como un punto móvil del espacio X , cuya ley de movimiento es precisamente $x(t)$, siendo t el tiempo.

Además, se puede obtener más información acerca del comportamiento de las soluciones del sistema, graficando en el espacio de fase, que en $\mathbb{R} \times X$. Lo cual no quiere decir que las órbitas aportan más información, ya que contienen mucho menos que la gráfica de la solución.

Recordemos que en el caso que $g \in C[\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n]$ y sea localmente Lipschitz, el sistema (6.1) con $x(0) = x_0$ admite una única solución no prolongable $x(t, x_0)$ definida sobre un intervalo, y además las soluciones dependen continuamente de los datos iniciales.

La función $x(t, x_0)$ está definida sobre un conjunto abierto $\Sigma \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ y satisface las siguientes propiedades :

- (a) $x(0, x_0) = x_0$,
- (b) $x(t, x_0)$ es continua sobre Σ ,
- (c) $x(t + \tau, x_0) = x(t, x(\tau, x_0))$ sobre Σ .

A toda función $\Phi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ que satisfaga las propiedades (a) – (c) se le denomina sistema dinámico.

Definición 6.1 Sea $\varphi : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ una solución de (6.1). Al conjunto de puntos $\gamma = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \varphi(t), \text{ para algún } t \in (\alpha, \beta)\}$, lo llamaremos órbita u órbita de (6.1).

A la representación de todas las órbitas de un sistema la denominaremos diagrama de fase del sistema. Notemos que una órbita puede representar a infinitas soluciones del sistema (6.1), ya que si $\varphi(t)$ es solución, entonces $\varphi(t + c)$ también es solución, $\forall c \in \mathbb{R}$. Esto, geoméricamente significa que todo sistema autónomo siempre admite una familia de soluciones cuyas proyecciones dan origen a una sola órbita .

Definición 6.2 Diremos que x_0 es un punto de equilibrio del sistema (6.1), si $g(x_0) = 0$.

El siguiente teorema nos dice que dos órbitas del sistema (6.1), o nunca se intersectan o bien coinciden. Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ abierto y conexo.

Teorema 6.1 *Supongamos que $g \in C^1[D, \mathbb{R}^n]$. Por cada $x_0 \in D$, pasa una única órbita del sistema (6.1).*

Demostración. La existencia de una órbita de (6.1) a través del punto $x_0 \in D$ se sigue de la existencia y unicidad de la solución $\varphi(t)$ de (6.1) tal que $\varphi(0) = x_0$.

Supongamos que por un punto x_0 pasan dos órbitas $\gamma_1 \neq \gamma_2$, tales que $\gamma_1 \cap \gamma_2 \neq \emptyset$. Entonces existen $t_1, t_2 \in \text{Dom}\varphi_1 \cap \text{Dom}\varphi_2$ tales que $\varphi_1(t_1) = \varphi_2(t_2) = x_0$. Definamos $\psi(t) = \varphi_1(t - t_2 + t_1)$. Luego ψ es solución de (6.1). Como $\psi(t_2) = \varphi_1(t_1)$ y $\varphi_1(t_1) = \varphi_2(t_2)$, entonces $\psi(t_2) = \varphi_2(t_2)$. Luego, por la unicidad de las soluciones de (6.1) se tiene que $\psi(t) = \varphi_2(t)$, $\forall t \in (\alpha, \beta)$. De modo que la órbita de ψ coincide con la de φ_2 . Pero ψ es igual a φ_1 salvo desplazamientos, entonces la órbita de ψ coincide con la órbita de φ_1 . Contradicción ■

Corolario 6.2 *Si x_0 es un punto de equilibrio del sistema (6.1), entonces la única órbita que pasa por x_0 es ella misma.*

Teorema 6.3 *Si $\varphi : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una solución no prolongable del sistema (6.1), tal que*

$$(a) \lim_{t \rightarrow \beta^-} \varphi(t) = B \text{ y/o}$$

$$(b) \lim_{t \rightarrow \alpha^+} \varphi(t) = A,$$

con $A, B \in D$. Entonces $\beta = +\infty$ y/o $\alpha = -\infty$. Además B y/o A es un punto de equilibrio de (6.1).

Demostración. Supongamos que $\lim_{t \rightarrow \beta^-} \varphi(t) = B \in D$. Entonces $\beta = +\infty$, ya que si $\beta < \infty$, φ se podría prolongar a la derecha de β . Lo cual contradice el hecho que φ es no prolongable.

Ahora, como φ es solución de (6.1), entonces $\varphi'(t) = g(\varphi(t))$, de donde sigue que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi'(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} g(\varphi(t)) = g(B),$$

ya que g es continua.

Probemos que $g(B) = 0$. Como $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi'(t) = g(B)$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe $T > 0$ tal que $|\varphi'(t) - g(B)| < \varepsilon, \forall t \geq T$.

Supongamos que existe $i, 1 \leq i \leq n$, tal que $g_i(B) \neq 0$. Entonces $g_i(B) > 0$ ó $g_i(B) < 0$.

Si ocurre que $g_i(B) > 0$, entonces existe $T_1 > 0$ tal que

$$g_i(\varphi(t)) \geq \frac{g_i(B)}{2}, \quad \forall t \geq T_1.$$

Luego, se tiene que

$$\varphi'_i(t) = g_i(\varphi(t)) \geq \frac{g_i(B)}{2}, \quad \forall t \geq T_1,$$

de donde sigue

$$\varphi'_i(t) \geq \frac{g_i(B)}{2}, \quad \forall t \geq T_1.$$

Integrando la última inecuación obtenemos

$$\varphi_i(t) \geq \varphi_i(T_1) + \frac{g_i(B)}{2}(t - T_1), \quad \forall t \geq T_1.$$

lo cual implica que no existe el límite de $\varphi(t)$ cuando $t \rightarrow +\infty$, lo que es una contradicción. Análogamente se hace la prueba si $g_i(B) < 0$. ■

Observación 6.1 Si $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow D$ es una solución no constante del sistema (6.1), entonces φ se puede acercar a un punto crítico solamente cuando $t \rightarrow +\infty$ ó $t \rightarrow -\infty$.

Teorema 6.4 (Clasificación de Orbitas) Sea φ una solución no prolongable del sistema (6.1), definida sobre (α, β) , $-\infty \leq \alpha, \beta \leq +\infty$. Entonces se verifica una de las siguientes opciones :

- (1) φ es inyectiva,
- (2) φ es constante,
- (3) φ es periódica no constante.

Para demostrar este teorema haremos uso de un lema auxiliar.

Lema 6.5 Sea $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua y definamos

$$T = \{c \in \mathbb{R} : \varphi(t + c) = \varphi(t), \forall t \in \mathbb{R}\}.$$

Si $T \neq \emptyset$, entonces existe un $\tau > 0$ tal que $T = \tau Z$ ó T es denso en \mathbb{R} .

Demostración. En primer lugar probemos que T es un subgrupo aditivo de \mathbb{R} . En efecto, como \mathbb{R} es un grupo aditivo, entonces basta ver que :

- (a) Si $c_1, c_2 \in T$, entonces $(c_1 + c_2) \in T$.
- (b) Si $c \in T$, entonces existe $c_1 \in T : c + c_1 = 0$.

Supongamos que $c_1, c_2 \in T$. Entonces $\varphi(t + c_1) = \varphi(t)$ y $\varphi(t + c_2) = \varphi(t), \forall t \in \mathbb{R}$. Luego se tiene que

$$\varphi(t + (c_1 + c_2)) = \varphi((t + c_1) + c_2) = \varphi(t + c_1) = \varphi(t),$$

por lo que $c_1 + c_2 \in T$.

Sea $c \in T$. Luego $\varphi(t + c) = \varphi(t), \forall t \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\varphi(t - c) = \varphi((t - c) + c) = \varphi(t);$$

por lo que $-c \in T$.

Veamos que T es cerrado topológicamente en \mathbb{R} . En efecto, sea (c_n) una sucesión de puntos de T y $c_n \rightarrow c$ cuando $n \rightarrow +\infty$. Como $c_n \in T$, entonces $\varphi(t) = \varphi(t + c_n)$. Luego por la continuidad de φ y haciendo tender $n \rightarrow \infty$, obtenemos $\varphi(t) = \varphi(t + c), \forall t \in \mathbb{R}$. Por lo tanto $c \in T$.

Pongamos $\tau = \inf(T \cap \mathbb{R}^+)$. Como T es cerrado se sigue que $\tau \in T$. Mostremos que

- i) Si $\tau > 0$, entonces $T = \tau Z$.
- ii) Si $\tau = 0$, entonces $\overline{T} = \mathbb{R}; .$

En el primer caso, veamos primero que $\tau Z \subset T$. En efecto, sea $a = \tau n$, con $n \in Z$. Luego, $a = \tau + (n - 1)\tau$, entonces

$$\begin{aligned} \varphi(t + a) &= \varphi(t + \tau n) = \varphi((t + (n - 1)\tau) + \tau) \\ &= \varphi(t + (n - 1)\tau) = \varphi((t + (n - 2)\tau) + \tau) \\ &= \dots = \varphi(t + (n - (n - 1))\tau) = \varphi(t + \tau) = \varphi(t). \end{aligned}$$

Mostremos ahora que $T \subset \tau Z$. Sea $a \in T$ y supongamos que $a > \tau$. Entonces existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $n\tau < a \leq (n + 1)\tau$. De donde sigue que $0 < a - n\tau \leq \tau$. Entonces $a - n\tau \in T \cap \mathbb{R}^+$ por lo que $a - n\tau \geq \tau$. Por lo tanto $a = (n + 1)\tau$. En el caso que $a < -\tau$, se sigue que $-a > \tau$ y volvemos aplicar la prueba anterior.

Supongamos que $\tau = 0$. Entonces para todo $\varepsilon > 0$, existe $C_0 \in T \cap \mathbb{R}^+$ tal que $0 < C_0 < \varepsilon$.

Sea $t \in \mathbb{R}$. Entonces existe $k \in Z$ tal que $kC_0 \leq t < (k + 1)C_0$. Así, $0 \leq t - kC_0 < C_0 < \varepsilon$. ■

Demostremos ahora el teorema 6.4 . Supongamos que φ no es inyectiva; es decir, existen números $t_1 < t_2$ tales que $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$. Luego, poniendo $c = t_2 - t_1$, sigue que $\varphi(t + c) = \varphi(t), \forall t \in \mathbb{R}$.

Por el lema anterior sabemos que $T = \{c \in \mathbb{R} : \varphi(t + c) = \varphi(t), t \in \mathbb{R}\}$, es discreto o denso en \mathbb{R} . Luego, si $\overline{T} = \mathbb{R}$, entonces φ es una solución constante; y , si $T = \tau Z$, entonces φ es una solución periódica no constante, con período minimal τ . ■

Recordemos que dos órbitas coinciden o son disjuntas. Luego, $D = \text{Dom } g$ se puede descomponer en una unión disjunta de curvas diferenciables: imagen biunívoca de un intervalo de \mathbb{R} ó punto de equilibrio ó curva difeomorfa a un círculo (órbita cerrada-solución periódica). A partir de esta observación, se puede definir rigurosamente el concepto de diagrama de fase.

Definición 6.3 Al conjunto $D = \text{Dom } g$, dotado de una descomposición en órbitas de g , lo denominaremos diagrama de fase de g . Las órbitas están orientadas en el sentido de las curvas integrales del campo vectorial g y los puntos de equilibrio están dotados de la orientación trivial.

En lo que sigue supondremos que todas las soluciones del sistema (6.1) existen, son únicas y están definidas para todo t en \mathbb{R} . Sea φ una solución de (6.1), tal que $\varphi(0) = p$. Definimos la semiórbita positiva de φ como:

$$\gamma_p^+ = \{x : x = \varphi(t), t \geq 0\},$$

y la semiórbita negativa de φ como:

$$\gamma_p^- = \{x : x = \varphi(t), t \leq 0\}.$$

En el caso que no se especifique ningún punto, escribiremos simplemente $\gamma, \gamma^+, \gamma^-$ para la órbita, semiórbita positiva y semiórbita negativa, respectivamente. Donde $\gamma = \gamma^+ \cup \gamma^-$.

Definimos el conjunto ω -límite de una órbita γ , como sigue:

$$\omega(\gamma) = \{x : \exists (t_k)_{k \in \mathbb{N}}, \lim_{k \rightarrow +\infty} t_k = \infty, \text{ y } \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(t_k) = x\}.$$

Análogamente se define el conjunto α -límite de una órbita γ :

$$\alpha(\gamma) = \{x : \exists (t_k)_{k \in \mathbb{N}}, \lim_{k \rightarrow +\infty} t_k = -\infty, \text{ y } \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(t_k) = x\}.$$

Un conjunto M en \mathbb{R}^n , se dice que es un conjunto invariante respecto del sistema (6.1), si para cada $p \in M$, se tiene que $x(t, p) \in M$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Es claro de esta definición que toda órbita de (6.1) es un conjunto invariante. Diremos que M es positivamente (negativamente) invariante, si para cada $p \in M$, se satisface que $x(t, p) \in M$ para todo $t \geq 0$ ($\forall t \leq 0$).

Teorema 6.6 *Los conjuntos α y ω límites de una órbita son cerrados e invariantes. Además, si γ^+ (γ^-) está acotado, entonces el conjunto ω (α)-límite de γ es no vacío, compacto, conexo y*

$$\text{dist}[x(t, p), \omega(\gamma)] \rightarrow 0, t \rightarrow +\infty,$$

$$\text{dist}[x(t, p), \alpha(\gamma)] \rightarrow 0, t \rightarrow -\infty.$$

Demostración. Sea $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \omega(\gamma)$, tal que $x_k \rightarrow x, k \rightarrow +\infty$. Mostremos que $x \in \omega(\gamma)$. Como $x_k \in \omega(\gamma)$, entonces existe una sucesión $t_{k_i} \rightarrow +\infty$, cuando $i \rightarrow +\infty$, tal que $\lim_{i \rightarrow +\infty} \varphi(t_{k_i}) = x_k$. Por lo tanto, dado $\varepsilon > 0$, existe $N(k) > 0$, tal que

$$|\varphi(t_{k_i}) - x_k| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall i \geq N(k).$$

Por otra parte, como $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$, existe $N_1 > 0$, tal que $|x_k - x| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall k \geq N_1$. Fijemos un $k^* \geq N_1$. Entonces

$$|\varphi(t_{k_i^*}) - x| \leq |\varphi(t_{k_i^*}) - x_{k^*}| + |x_{k^*} - x| < \varepsilon, \quad \forall i \geq N(k^*).$$

Esto prueba que $x \in \omega(\gamma)$.

Mostremos ahora que $\omega(\gamma)$ es invariante. Si $q \in \omega(\gamma)$, entonces existe una sucesión $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}, \lim_{k \rightarrow \infty} t_k = +\infty$, tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} x(t_k, p) = q$. Por lo tanto, para todo $t \in \mathbb{R}$ fijo, se tiene que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(t + t_k, p) = \lim_{k \rightarrow \infty} x(t, x(t_k, p)) = x(t, q).$$

Lo cual demuestra que $\gamma_q \subset \omega(\gamma)$.

Si γ_p^+ está acotado, entonces existe una constante $M > 0$ tal que

$$|x(t, p)| \leq M, \quad \forall t \geq 0.$$

Sea $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}, t_k \rightarrow +\infty$. Entonces la sucesión numérica $(x(t_k, p))_{k \in \mathbb{N}}$ está acotada. Lo cual implica que existe una subsucesión de $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$, a la cual denotaremos de la misma manera, tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} x(t_k, p) = x$, para algún $x \in \mathbb{R}^n$. Lo cual implica que $\omega(\gamma) \neq \emptyset$. Además, de este argumento se obtiene que $\omega(\gamma)$ está acotada. Como ya habíamos probado que $\omega(\gamma)$ es cerrado, concluimos la compacidad de $\omega(\gamma)$.

Supongamos que $\text{dist}[x(t, p), \omega(\gamma)] \not\rightarrow 0, t \rightarrow +\infty$. Entonces existe una sucesión $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ y un $\varepsilon > 0$ tal que

$$\text{dist}[x(t_k, p), \omega(\gamma)] > \varepsilon, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Como $|x(t_k, p)| \leq M, \forall k \in \mathbb{N}$, existe una subsucesión $(t_{k_i})_{i \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{i \rightarrow \infty} x(t_{k_i}, p) = x \in \omega(\gamma)$. Lo cual es una contradicción.

La conectividad de $\omega(\gamma)$ sigue inmediatamente del hecho que

$$\text{dist}[x(t, p), \omega(\gamma)] \rightarrow 0, t \rightarrow +\infty.$$

Las afirmaciones con respecto al conjunto α -límite se prueban en forma análoga. ■

Corolario 6.7 *Los conjuntos α y ω -límites contienen sólo órbitas completas.*

Definición 6.4 Diremos que un conjunto M es un conjunto minimal respecto al sistema (6.1), si $M \neq \emptyset$, es cerrado e invariante y no tiene ningún subconjunto que posea las tres propiedades antes mencionadas.

Lema 6.8 Si A es un conjunto compacto, invariante respecto del sistema (6.1), entonces A posee un subconjunto minimal.

Demostración. Sea F una familia de subconjuntos definida como sigue

$$F = \{B : B \subset A, B\text{-compacto e invariante}\}.$$

Definamos en F una relación de orden “ $<$ ” como sigue : Para cada B_1, B_2 en F , decimos que $B_2 < B_1$, si $B_2 \subset B_1$. Para cualquier subfamilia F_1 de F totalmente ordenada por “ $<$ ”, pongamos $C = \bigcap_{B \in F_1} B$.

La familia F_1 tiene la propiedad de la intersección finita. En efecto, si $B_1, B_2 \in F_1$, entonces $B_1 < B_2$ ó $B_2 < B_1$. En ambos casos $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$ y $B_1 \cap B_2 \in F$.

Así, $C \neq \emptyset$, compacto e invariante; y para cada $B \in F_1$ se sigue que $C < B$. Supongamos ahora que D es un subconjunto perteneciente a F , tal que $D < B, \forall B \in F_1$. Entonces $D \subset B$, para todo $B \in F_1$, lo cual implica que $D \subset C$. Por lo tanto C es el elemento minimal de F_1 . Como toda subfamilia de F totalmente ordenada, posee un mínimo, se sigue por el lema de Zorn que existe un mínimo en F . Este elemento minimal de F al cual llamaremos M , posee todas las propiedades requeridas. ■

Ejemplo 6.1 Consideremos la ecuación logística $x'(t) = x(1 - x)$.



Figura 6.1:

Del diagrama de fase se ve que el conjunto ω (α) límite de las órbitas con dato inicial en el intervalo $(0, 1)$ es el punto $\{1\}$ ($\{0\}$). El conjunto ω -límite de cualquier órbita con dato inicial negativo es vacío. Análogamente se analizan las otras situaciones. Además, los conjuntos $\{1\}, \{0\}$ son minimales.

Ejemplo 6.2 Sea

$$\begin{aligned} x'_1 &= -x_2 + \varepsilon x_1(1 - r^2) \\ x'_2 &= x_1 + \varepsilon x_2(1 - r^2) \end{aligned}$$

donde $\varepsilon > 0, r^2 = x_1^2 + x_2^2$. Haciendo $x_1 = r \cos \theta, x_2 = r \sin \theta$, obtenemos que el sistema anterior es equivalente a:

$$\begin{aligned} \theta' &= 1 \\ r' &= \varepsilon r(1 - r^2). \end{aligned}$$

A partir de este sistema, vemos que el diagrama de fase luce como se muestra en la siguiente figura:

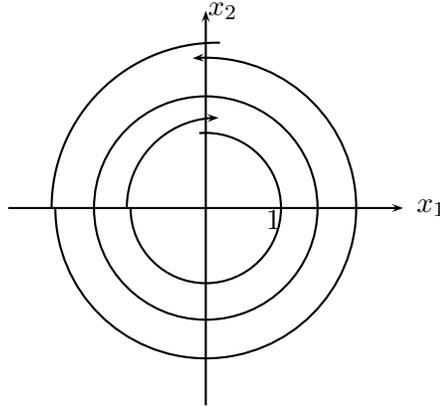


Figura 6.2

Llamemos $A = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$, $B = \{0\}$. Tanto A como B son conjuntos minimales A es el conjunto ω -límite de cualquier órbita del sistema, excepto $x_1 = x_2 = 0$, y B es el conjunto α -límite de todas las órbitas encerradas por la circunferencia.

Teorema 6.9 *Si K es un conjunto positivamente invariante respecto del sistema (6.1) y homeomorfo a la bola cerrada de \mathbb{R}^n , entonces el sistema (6.1) tiene un punto de equilibrio en K .*

Demostración. Para cada $\tau_1 > 0$, $x(\tau_1, \cdot)$ define una aplicación continua de K en si mismo. Por lo tanto, en virtud del teorema de Brouwer, existe un $p_1 \in K$ tal que $x(\tau_1, p_1) = p_1$. Sea $(\tau_m)_{m \in \mathbb{N}}$ una sucesión tal que $\lim_{m \rightarrow \infty} \tau_m = 0$ y $x(\tau_m, p_m) = p_m, \forall m \in \mathbb{N}$. Sin pérdida de generalidad supondremos que $\lim_{m \rightarrow \infty} p_m = p \in K$, ya que K es compacto. Para cada t y $m \in \mathbb{Z}$ existe un entero $k_m(t)$ tal que $k_m(t)\tau_m \leq t < (k_m(t)+1)\tau_m$ y $x(k_m(t)\tau_m, p_m) = p_m$ para todo t ya que $x(t, p_m)$ es periódica de periodo τ_m en t . Además,

$$\begin{aligned} |x(t, p) - p| &\leq |x(t, p) - x(t, p_m)| + |x(t, p_m) - p_m| + |p_m - p| \\ &= |x(t, p) - x(t, p_m)| + |x(t - k_m(t)\tau_m, p_m) - p_m| + |p_m - p| \end{aligned}$$

de donde se sigue que $|x(t, p) - p| \rightarrow 0$ cuando $m \rightarrow \infty$ para todo t . Por lo tanto, p es un punto de equilibrio del sistema (6.1). ■

Hemos expuesto en forma sucinta, algunos de los conceptos y hechos básicos de la teoría geométrica de las sistemas autónomos. Señalemos que algunos de los problemas de los que se ocupa esta teoría, tienen relación con la caracterización de los conjuntos minimales y el comportamiento de las soluciones de la ecuaciones diferenciales cerca

de conjuntos minimales y la manera de poder reconstruir el conjunto ω -límite de una órbita a partir de los conjuntos minimales y las órbitas que los conectan.

A continuación en forma breve y sin demostraciones, trataremos de dar respuesta a estas interrogantes para sistemas bidimensionales. Concretamente se caracteriza el conjunto ω -límite de una órbita acotada (Teorema de Poincaré-Bendixson) y se describe el diagrama de fase alrededor de un punto crítico aislado para un sistema bidimensional lineal.

Sea

$$x' = f(x), \tag{6.2}$$

donde $f \in C^1[\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2]$. Supondremos que todas sus soluciones están definidas para todo t en \mathbb{R} .

Teorema 6.10 (a) Si γ^+ y $\omega(\gamma^+)$ tienen un punto regular en común, entonces γ^+ es una órbita periódica.

(b) Si M es un conjunto minimal de (6.2), entonces M es un punto crítico o una órbita periódica.

(c) Si γ^+ contiene puntos regulares y una órbita periódica γ_0 , entonces $\omega(\gamma^+) = \gamma_0$.

Su demostración se puede ver en Hale [11], p.p. 53-54.

Teorema 6.11 (Poincaré-Bendixson) . Si γ^+ es una semi-órbita positiva acotada y $\omega(\gamma^+)$ no contiene puntos de equilibrio, entonces:

- i) $\omega(\gamma^+) = \gamma^+$, ó
- ii) $\omega(\gamma^+) = \overline{\gamma^+} \setminus \gamma^+$.

En ambos casos el conjunto ω -límite es una órbita periódica, el caso (ii) se llama ciclo límite.

Demostración. Como γ^+ está acotada, entonces $\omega(\gamma^+) \neq \emptyset$ es compacto e invariante. Por lo tanto, en virtud del lema 6.8, $\omega(\gamma^+)$ posee un subconjunto minimal M . Además, M no contiene puntos críticos, ya que $\omega(\gamma^+)$ tampoco los posee. Así, por la parte (b) del teorema 6.10, M es una órbita periódica γ_0 . Finalmente nuestra afirmación sigue de la parte (c) del teorema 6.10.

§ 6.2 Clasificación de los Puntos Críticos de Sistemas Bidimensionales

Consideremos el sistema

$$\begin{aligned}x'_1 &= ax_1 + bx_2 \\x'_2 &= cx_1 + dx_2\end{aligned}\tag{6.3}$$

Supongamos que $ad - bc \neq 0$. Entonces (6.3) posee un único punto crítico, el origen $(0, 0)$.

Sea $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Sean λ_1 y λ_2 los autovalores de A . Sabemos que existe una matriz T no singular tal que $TAT^{-1} = J$, donde J es la forma canónica de Jordan y puede ser de la siguiente forma:

1. $J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ (λ_1 y λ_2 reales y distintos).
2. $J = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ ($\lambda_1 = \lambda_2$ reales; en este caso A es diagonalizable).
- ó
- $J = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}$ ($\lambda_1 = \lambda_2$ reales, A no es diagonalizable).
3. $J = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$ (λ_1 y λ_2 complejos conjugados).

Con el fin de clasificar los puntos críticos del sistema (6.3) analizaremos varios casos.

1. Supongamos que λ_1 y λ_2 son reales y distintos. Sin pérdida de generalidad se puede asumir que $\lambda_1 > \lambda_2$.

Como los autovalores de A son reales y distintos, entonces existe una matriz no singular T tal que con el cambio de variables $x = T^{-1}y$, el sistema $x' = Ax$ se transforma en el sistema

$$y'_1 = \lambda_1 y_1, \quad y'_2 = \lambda_2 y_2.$$

De donde obtenemos que:

$$y_1 = c_1 e^{\lambda_1 t}, \quad y_2 = c_2 e^{\lambda_2 t}.\tag{6.4}$$

Denotaremos por v_1 y v_2 los autovectores unitarios y correspondientes a λ_1 y λ_2 respectivamente; y por L_1 y L_2 las rectas que contienen a v_1 y v_2 , respectivamente.

Consideremos tres subcasos.

- (1.a) Supongamos que $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$. Pongamos $r = -\lambda_2/\lambda_1$. Es claro que $r > 0$. De (6.4) se obtiene $t = \frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{y_1}{c_1}$

$$y_2 = c_2 \left(\frac{y_1}{c_1} \right)^{-r} = c_2 \left(\frac{c_1}{y_1} \right)^r = \frac{c_2 c_1^r}{y_1^r}.$$

No es difícil verificar que el diagrama de fase luce como sigue (en todos los casos las flechas indican la dirección en que se recorren las órbitas, variando t desde $-\infty$ a $+\infty$).

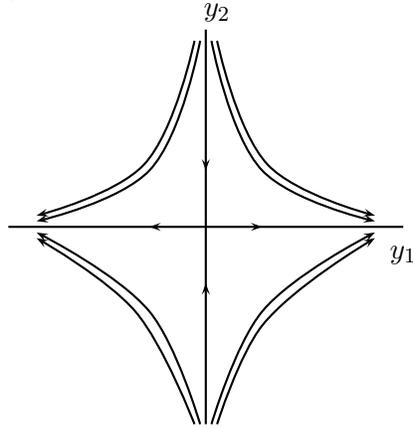


Figura 6.3: Punto de silla $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$.

- (1.b) $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$. En este caso, de (6.4), obtenemos que $y_2 = c_2 y_1^r / c_1^r$ con $r = \lambda_2/\lambda_1 > 1$. La figura 6.4 muestra el diagrama de fase del sistema transformado

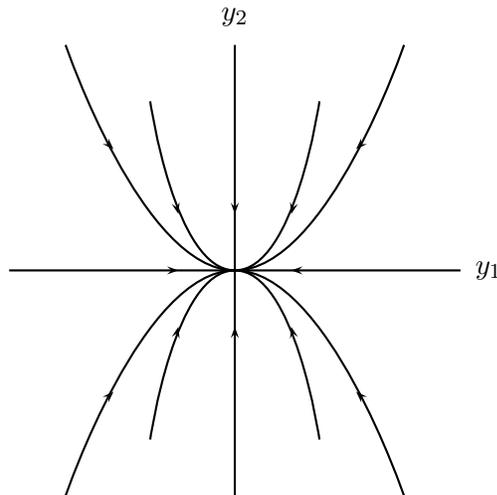


Figura 6.4: Nodo Estable $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$.

(1.c) $0 < \lambda_2 < \lambda_1$. Nuevamente de (6.3), se tiene $y_2 = c_2 y_1^r / c_1^r$ con $r = \lambda_2 / \lambda_1 < 1$.

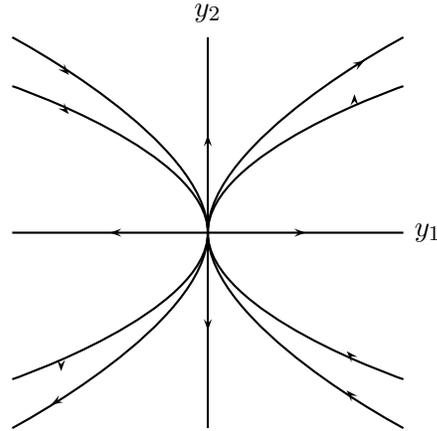


Figura 6.5: Nodo inestable $0 < \lambda_2 < \lambda_1$.

2. Los autovalores de $\lambda_1 y \lambda_2$ son reales e iguales.

(2.a) Supongamos que A es diagonalizable. Entonces se tiene que

$$y_1 = c_1 \exp(\lambda t), \quad y_2 = c_2 \exp(\lambda t),$$

de donde se obtiene que $y_2 = c_2 y_1 / c_1$, si $c_1 \neq 0$. Asumiendo que $\lambda < 0$, se tiene un punto nodal impropio estable (nodo impropio estable). Si $\lambda > 0$, el punto es un nodo impropio inestable.

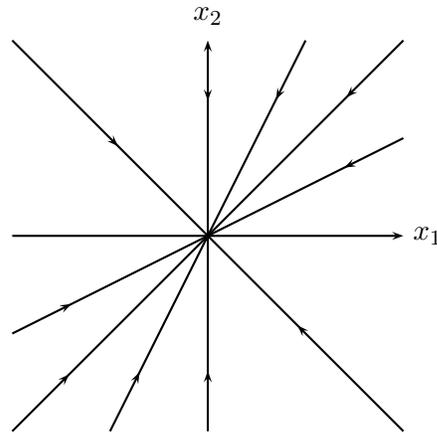


Figura 6.6: Nodo impropio estable.

(2.b) A no es diagonalizable. En este caso (6.3) se puede transformar en :

$$y' = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} y$$

de donde se sigue que

$$\begin{aligned} y_1 &= c_1 \exp(\lambda t) \\ y_2 &= (c_1 t + c_2) \exp(\lambda t). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} y_2 &= (c_1 t + c_2) \frac{y_1}{c_1}, \quad c_1 \neq 0 \\ t &= \frac{1}{\lambda} \ln \frac{y_1}{c_1} \\ y_2 &= \left(\frac{c_1}{\lambda} \ln \frac{y_1}{c_1} + c_2 \right) \frac{y_1}{c_1} \end{aligned}$$

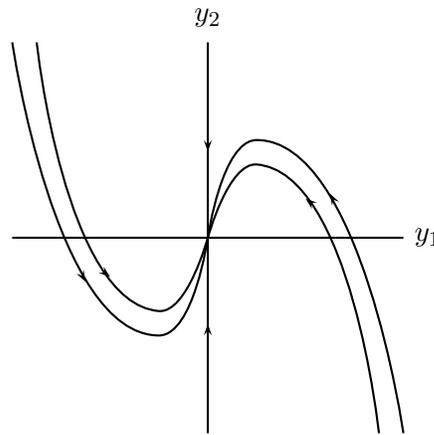


Figura 6.7: Nodo impropio estable.

3. λ_1 y λ_2 complejas conjugadas.

Sabemos que (6.3) se puede transformar en:

$$y' = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} y.$$

Entonces

$$y_1 = (c_1 \cos \beta t - c_2 \sin t\beta) \exp(\alpha t)$$

$$y_2 = (c_1 \sin \beta t - c_2 \cos t\beta) \exp(\alpha t)$$

(3.a) Si $\alpha = 0$ y $\beta \neq 0$, al punto se llama centro.

(3.b) $\alpha < 0$. Foco estable.

(3.c) $\alpha > 0$. Foco inestable.

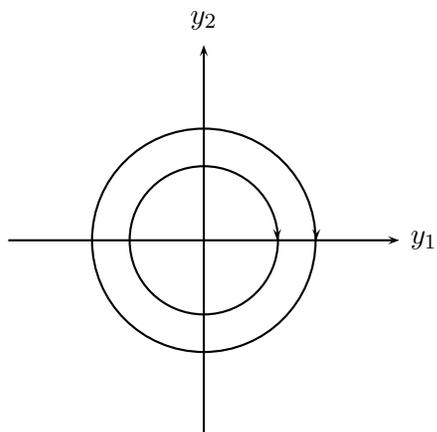


Figura 6.8: Centro.

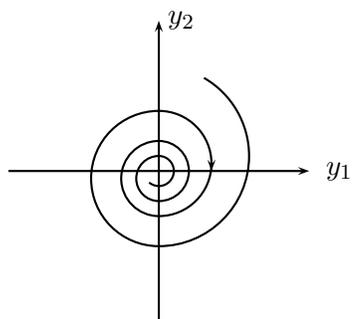


Figura 6.9: Foco estable.

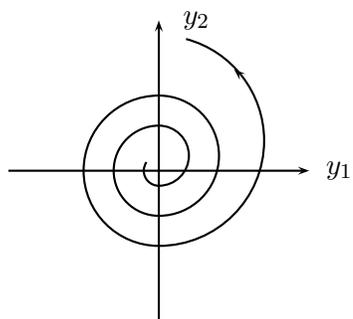


Figura 6.10: Foco inestable.

§ 6.3 Comentarios y Sugerencias

En este capítulo hemos resumido sólo los hechos mas elementales de la teoría de sistemas dinámicos. El lector comprenderá que en un primer curso de Ecuaciones Diferenciales no es posible cubrir en detalle toda la teoría geométrica. Los problemas que surgen son variados y complejos y han dado origen a un gran volumen de libros y artículos. Para una primera lectura sobre sistemas dinámicos continuos recomendamos los libros de Jorge Sotomayor [24], Jacob Palis [17], Hirsch y Smale [12]. Para sistemas dinámicos discretos se puede consultar el libro de Robert Devaney [5]. Una excelente exposición, pero menos elemental, tanto para sistemas dinámicos discretos y continuos es el libro de Clark Robinson [19].

§ 6.4 Ejercicios y Problemas

1. Pruebe que una órbita de (6.1) es una curva cerrada si y sólo si ella corresponde a una solución periódica no constante de (6.1)
2. Muestre que una solución periódica no constante de un sistema autónomo no puede ser asintóticamente estable en el sentido de Liapunov.
3. Describa el diagrama de fase del sistema

$$\begin{aligned}x_1' &= x_2(x_2^2 - x_1^2), \\x_2' &= -x_1(x_2^2 - x_1^2).\end{aligned}$$

4. Sea γ_p la órbita correspondiente a la solución $x(t, p)$, definida para todo $t \in \mathbb{R}$. Pruebe que:

$$\begin{aligned}\text{(i)} \quad \omega(\gamma) &= \bigcap_{p \in \gamma} \overline{\gamma_p^+} = \bigcap_{\tau \in \mathbb{R}} \overline{\bigcup_{t \geq \tau} x(t, p)}, \\ \text{(ii)} \quad \alpha(\gamma) &= \bigcap_{p \in \gamma} \overline{\gamma_p^-} = \bigcap_{\tau \in \mathbb{R}} \overline{\bigcup_{t \leq \tau} x(t, p)}.\end{aligned}$$

5. Considere el sistema

$$\begin{aligned}\theta' &= \sin^2 \theta + (1 - r)^2, \\r' &= r(1 - r)\end{aligned}$$

Muestre que el conjunto ω -límite de cualquier órbita que no sean $r = 1$ y $r = 0$ es el círculo $r = 1$; además que los conjuntos minimales sobre el círculo $r = 1$, son $\theta = 0$ y $\theta = \pi$. ¿ Puede concluir ahora que todo conjunto ω -límite es necesariamente minimal ? .

6. Construya un sistema bidimensional que tenga una órbita cuyo conjunto ω -límite no es vacío y desconexo. Ver p. 149 de [19].
7. Pruebe que si $x' = f(x)$, con $x \in \mathbb{R}^2$ tiene una semiórbita acotada, entonces f tiene al menos un punto de equilibrio.

Indicación: Use el teorema de Poincaré-Bendixson y el teorema 6.9.

8. (Teorema de Bendixson). Si $D \subset \mathbb{R}^2$ es un dominio simplemente conexo y $\text{div} f(x) \neq 0, \forall x \in D$, entonces el sistema $x' = f(x)$ no posee órbitas periódicas en D .

Indicación : Use la fórmula de Green y proceda por reducción al absurdo.

9. Sea $x' = Ax$ un sistema bidimensional. Pruebe que el sistema perturbado $y' = Ay + By$, con $|B| < \varepsilon, \varepsilon$ suficientemente pequeño, preserva el diagrama de fase solamente en torno de los puntos de equilibrio del tipo silla y foco.

10. Compare los diagramas de fase en un entorno del origen, de los siguientes sistemas:

$$\left. \begin{array}{l} x' = x_1 \\ x'_2 = -x_2 \end{array} \right\}, \quad \left. \begin{array}{l} x'_1 = x_1 \\ x'_2 = -x_2 + x_1^3 \end{array} \right\}.$$

11. Considere el sistema de Lorenz

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= ax - y - xz \\ \dot{z} &= xy - bz \end{aligned} \tag{6.5}$$

donde σ, a y b son parámetros positivos. El sistema (6.5) es una aproximación de modelos meteorológicos más complejos.

Demuestre que el sistema (6.5) es puntualmente disipativo.

Ayuda: Considere la siguiente función de Liapunov

$$V(x, y, z) = ax^2 + \sigma y^2 + b(z - 2a)^2 \quad .$$

Bibliografía

- [1] Aguilera, J., Lizana, M. Estudio cualitativo de ecuaciones diferenciales ordinarias. Imprenta Universitaria, UCV, 1990.
- [2] Courant, Robbins What is the Mathematics. Oxford Univ. Press. 1941.
- [3] Coppel W.A. Dichotomies in Stability Theory. Lect. Notes in Math. V.629, Springer Verlag, 1978.
- [4] Coddinton, E.A, Levinson, N. Theory of Ordinary Differential Equations. Mc Graw-Hill, New York, 1955.
- [5] Devaney, R. L. Chaotic dynamical systems. Addison-Wesley, 1989.
- [6] Driver, R.D. Ordinary and Delay Differential Equation. App. Math. Sc. vol.20, Springer-Verlag, 1977.
- [7] Daleckii, Ju, Krein, M.G. Stability of Solutions of Differential Equations in Banach Spaces. Trans. A.M.S., vol. 43, 1974.
- [8] Dieudonné, J. Abrégé d'histoire des Mathématiques 1770-1900, Vol. II, Herman, 1978.
- [9] De Guzmán, M. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Teoría de Estabilidad y Control. Ed. Alhambra , Madrid, 1975.
- [10] Höning, Ch. S. Aplicações de Topologia à análise. IMPA, Projeto Euclide, Rio-Janeiro, 1976.
- [11] Hale, J.K. Ordinary Differential Equations. John Wiley Interscience 1969.
- [12] Hirsch, M. , Smale, S. Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra. Academic Press 1974.
- [13] Lancaster, P. Theory of Matrices. Acad. Press, 1969.
- [14] Lakshmikantham, V. , Leela, S. Differential and Integral Inequalities. vol. I y II. Acad. Press, 1969.

- [15] Milnor, J. Analytic Proofs of the Hairy ball theorem and the Brouwer fixed point theorem. *Am. Math. Monthly*, vol. 85, p.p.521-524, 1978.
- [16] Piccini, L.C., Stampacchia, G., Vidossich, G. Ordinary Differential Equations in \mathbb{R}^n , problems and methods. *App. Math. Sc.* vol. 39, Springer Verlag, 1984.
- [17] Palis J., Del Melo, W. Introdução aos Sistemas Dinâmicos. Projeto Euclides, Rio Janeiro, 1977.
- [18] Perko, L. Differential equations and dynamical systems. Springer Verlag, Texts in App. Math. 7, 1991.
- [19] Robinson, C. Dynamical systems. Stability, symbolic dynamics, and chaos. CRC Press, 1999.
- [20] Rouche N, Habets P, Laloy M. Stability Theory by Liapunov's Direct Method. *App. Math. Sc.* vol.22, Springer-Verlag, 1977.
- [21] Rogers, C. A Less Stronger Version of Minor's proof of Brouwer's Fixed Point Theorem. *Am. Math. Monthly*, vol. 87, p.p.525-5227, 1980.
- [22] Smart, D. Fixed Point Theorems. Cambridge Univ. Press, 1974.
- [23] Siljak, D.D. Large Scale Dynamic Systems. Stability and Structure. North-Holland, 1978.
- [24] Sotomayor, J. Lições de equações diferenciais ordinárias. Projeto Euclides, Rio Janeiro, 1979.
- [25] Wiggins, S. Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos. Texts in App. Math. 2, Springer Verlag, 1990.
- [26] Yoshizawa, T. Stability Theory and the Existence of Periodic Solutions and Almost Periodic Solutions. *App. Math. Sc.* vol.14, Springer-Verlag, 1975.